МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

Г. К. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

10 класс

ДРОФА

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

Г. К. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

10 класс

Учебник

Рекомендовано Министерством просвещения Российской Федерации

6-е издание, стереотипное

Москва

ДРОФА

2019

Российский учебник

Оглавление

Уважаемые старшеклассники!

Этот учебник продолжает курс алгебры 7—9 классов. В течение следующих двух лет вы разовьёте, обогатите и углубите свои математические знания. И, главное, научитесь их применять.

Знать математику — значит уметь решать задачи. Именно задачи вам предстоит решать на ЕГЭ.

В учебнике задания разной степени трудности. В заданиях, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытывать никаких затруднений.

Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу связан с некоторыми техническими сложностями.

Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●». План их выполнения полезно обсудить в классе с учителем.

Номера самых трудных задач имеют обозначение «*».

Значком «■» отмечены задания, которые следует выполнять с помощью калькулятора. В учебнике рассматривается калькулятор операционной системы Windows.

При изучении математики вам предстоит строить много графиков. В некоторых случаях работу в тетради полезно совмещать, а иногда и заменять работой на компьютере в одной из компьютерных программ построения и исследования графиков функций и уравнений. Такие программы свободно и бесплатно распространяются в Интернете. Мы рекомендуем две русифицированные программы GeoGebra и WinPlot.

В тексте учебника рекомендация использовать какую-нибудь компьютерную программу обозначается символом .

Выполненные в этих программах решения задач красивы и наглядны. Многие из них размещены школьниками и учителями математики в Интернете, где их можно посмотреть. Надеемся, что и ваши решения можно будет там найти.

Кроме основного материала, изучение которого обязательно, в учебнике помещён и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало такого материала обозначается «▼», а конец «△».

В конце учебника в разделе «Основные формулы» вы можете найти нужную формулу.

Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. Если выполнить задание вы не можете, то прочитайте совет к задаче или посмотрите её решение. В этом вам помогут разделы «Ответы», «Советы» и «Решения».

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашними контрольными работами. Для домашней контрольной работы указывается примерное время, на которое рассчитано её выполнение.

Задания домашних контрольных работ разбиты на три уровня, которые соответствуют удовлетворительной, хорошей и отличной оценке. Так что вы сами сможете оценить свои математические достижения.

В учебник не вошли многие важные и интересные математические вопросы, поэтому для тех, кто интересуется математикой, в справочном разделе учебника имеется список дополнительной литературы и интернет-ресурсов.

Авторы желают вам успехов!

Глава 1

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Вы уже знакомы с понятием функции из курса алгебры. Однако и в различных разделах математики, и в разных школьных учебниках определение функции даётся по-разному. Мы будем использовать одно из самых простых определений этого важнейшего математического понятия. С этим определением, а также с некоторыми связанными с понятием функции обозначениями и математическими терминами вы познакомитесь в первом пункте главы. Во втором пункте вы встретитесь с некоторыми уже знакомыми вам функциями и графиками, в третьем речь пойдёт о важных свойствах функций, часто применяемых при решении уравнений и неравенств, а в четвёртом — об основных преобразованиях графиков.

1. Понятие функции

В окружающем нас мире многие величины взаимосвязаны, например, количество букв на странице этого учебника зависит от номера страницы, время разморозки в СВЧ-печи зависит в основном от массы продукта, а площадь квадрата — от длины его стороны. Во всех трёх случаях каждому *допустимому* (возможному) значению второй из величин соответствует одно значение первой. Понятно, что в первом примере за номер страницы учебника можно взять любое натуральное число, не большее 285, во втором примере масса продукта ограничена рабочим объёмом печи, а длина стороны квадрата из третьего примера, конечно, положительна.

Мы привели здесь простые примеры зависимостей между двумя величинами. Однако на практике всё несколько сложнее. Так, например, время разморозки зависит не только от массы продукта, но и от его формы, и от мощности микроволнового излучения.

В математике обычно отвлекаются (абстрагируются) от физической природы величин и рассматривают зависимости между числовыми переменными.

Переменную y называют **функцией** переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y.
Переменную x называют **аргументом** функции y.

Правило, по которому для каждого допустимого значения x находят соответствующее ему значение функции, обозначают какой-либо буквой. Так, например, чтобы указать, что значения y получают из значений x по правилу f, пишут:

$$y = f(x).$$

Множество допустимых значений аргумента называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.
Множество, которое составляют все значения функции, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \frac{4}{x}$ и вычислить значения функции при x, равном: $2, \frac{3}{4}, -6$.

Решение. На аргумент x формула $y = \frac{4}{x}$ накладывает единственное ограничение: $x \neq 0$, поэтому областью определения данной функции является объединение двух числовых промежутков (интервалов): $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Значение функции, которое соответствует, например, $x = 2$, обозначают $y(2)$:

$$y(2) = \frac{4}{2} = 2, \quad y\left(\frac{3}{4}\right) = 4 : \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4}{3} = \frac{16}{3}, \quad y(-6) = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y(2) = 2$, $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{3}$, $y(-6) = -\frac{2}{3}$.

Примечание 1. В этом примере правило, по которому по значению аргумента находят значение функции, было представлено выражением $\frac{4}{x}$. Такой способ задания функции называют ***аналитическим***. Этим способом задано большинство функций, которые встретятся вам на страницах этого учебника.

Другая ситуация с областью определения возникает, если, например, буквами x и y обозначены длины сторон в сантиметрах прямоугольника, имеющего площадь 4 см^2. Тогда в силу положительности длин область определения функции $y = \frac{4}{x}$ представит собой числовой интервал $(0; +\infty)$.

Примечание 2. Знак «$\cup$», который использовался для ***объединения*** промежутков, в математике объединяет любые множества, например: $\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$.

Перевернув знак объединения, получим математический символ для ***пересечения*** множеств: $\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\} = \{3\}$. Если повернуть знак объединения «$\cup$» на 90°, то получим знак, который показывает, что все элементы одного из множеств являются элементами другого, например: $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Как говорят в таких случаях, первое множество является ***подмножеством*** второго, или второе множество ***включает в себя*** первое.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ (рис. 1) задана *графически*. Найти: 1) $D(f)$; 2) $f(-1)$; 3) значения аргумента, при которых значение функции равно 2; 4) нули функции; 5) наибольшее и наименьшее значения функции.

Решение. 1) Область определения этой функции — числовой промежуток $[-3; 6]$;

2) $f(-1) \approx -0,7$;

3) $f(x) = 2$ при $x \approx -2,9$, $x \approx 0,4$ и $x \approx 1,7$;

4) нули функции, т. е. значения x, при которых $f(x) = 0$:

$$x \approx -2,3,\ x \approx -0,4 \text{ и } x \approx 2,7;$$

5) наибольшее значение функции: $\max f(x) = f(1) = 4,5$, наименьшее значение функции: $\min f(x) = f(6) = -3$.

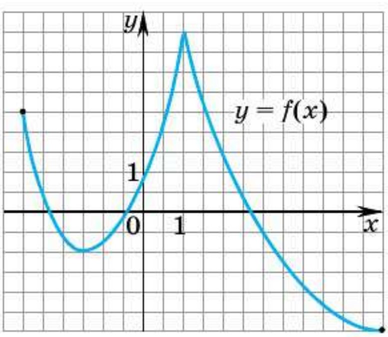


Рис. 1

Пример 3. На рисунке 2 изображён график функции $x = f(y)$, аргументом которой является переменная y. Является ли это множество точек координатной плоскости графиком функции y?

Решение. Чтобы некоторое множество точек координатной плоскости представляло собой график функции y, все эти точки должны иметь разные абсциссы — *любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, или имеет единственную точку, или не имеет ни одной общей точки с графиком функции y*. На рисунке вы видите, что ось ординат (прямая $x = 0$) пересекает данную кривую в двух точках, значит, эта кривая не является графиком функции y.

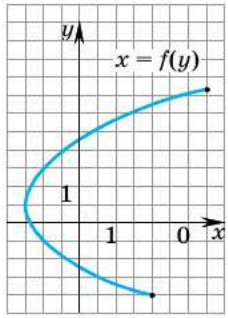


Рис. 2

Упражнения

1. Является ли y функцией x, если y — это:
1) дата, а x — температура воздуха в конкретном городе в 10 ч;
2) дата, а x — количество автомобилей, выпущенных за данные сутки заводом АВТОВАЗ;
3) атмосферное давление в данной точке земной поверхности, x — конкретное время суток?

2. Является ли y функцией x, если y — это площадь прямоугольника, а x его: 1) диагональ; 2) периметр; 3) отношение длин его сторон? Объясните свой ответ.

3. Является ли y функцией x, если y — это число десятых в десятичной записи числа x? Является ли x функцией y?

4.° Является ли y функцией x, если y — это двузначное число, а x — сумма его цифр? Является ли x функцией y?

5.° В книге 300 страниц. Петя каждый день прочитывает по 50 страниц этой книги. Обозначив буквой y количество непрочитанных Петей страниц, а буквой x — число дней, когда Петя читает данную книгу:
1) задайте аналитически функцию y;
2) укажите её естественную и реальную области определения.

6. Дана функция:

1) $f(x) = 2x + 3$;   3) $f(x) = x^2 + 3x + 4$;

2) $f(x) = -4x + 5$;   4) $f(x) = x^2 + 7x - 4$.

Найдите: а) $f(3)$; б) значения x, при которых $f(x) = 4$.

7. Правило f, задающее функцию $y = f(x)$, ставит в соответствие каждому двузначному числу x сумму его цифр y.

Найдите: 1) $D(f)$;   2) $f(17)$, $f(35)$, $f(59)$;

3) при каких значениях x функция $f(x)$ принимает значение, равное 3;

4) наибольшее и наименьшее значения функции;

5)* какое значение функции соответствует наибольшему количеству значений аргумента.

8. По каждому из графиков функций, изображённых на рисунках 3—8, найдите: 1) $D(f)$;   2) $E(f)$;   3) $f(-2)$;

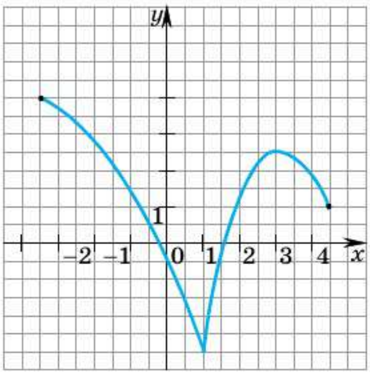


Рис. 3

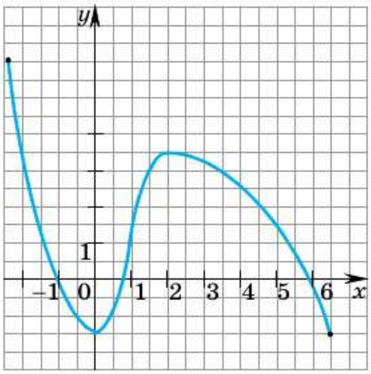


Рис. 4

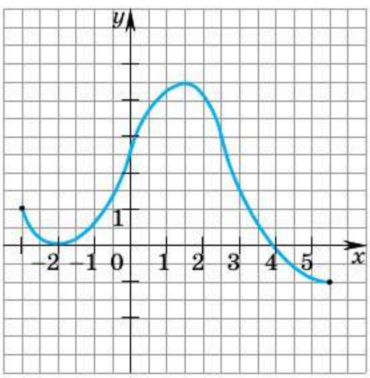


Рис. 5

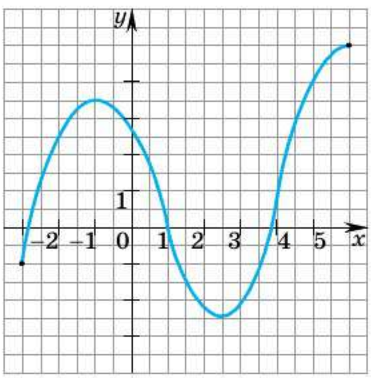


Рис. 6

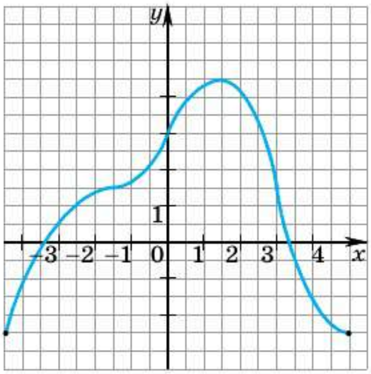


Рис. 7

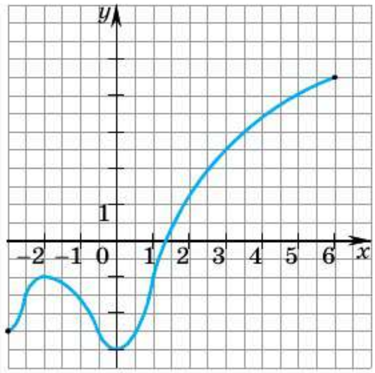


Рис. 8

4) при каком значении аргумента значение функции равно 3;

5) нули функции;

6) наибольшее и наименьшее значения функции.

9. Найдите область определения функции:

1) $y = 3x^2 - 5x + 1$;

2) $y = x^2 + \frac{3}{x} - 5$;

3) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$;

4) $y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$;

5) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$;

6) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

10. 1) Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x} + 2$;

б) $y = \sqrt{x - 3}$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$;

г) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+3}}$;

д) $y = \sqrt{(x+2)(x-2)}$;

е) $y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$;

ж) $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}$;

з) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$.

2) С помощью калькулятора вычислите с точностью до сотых значения функций при x, равном $\sqrt{2}$, если это возможно.

11. На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечает-

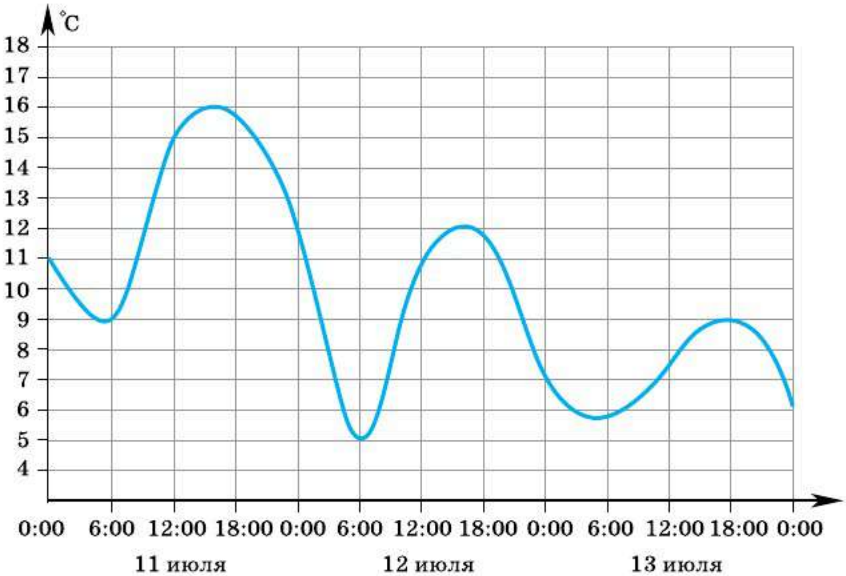


Рис. 9

ся время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия (рис. 9).

1) Когда была самая высокая, а когда самая низкая температура?

2) Какая температура воздуха была в воскресенье в 12 ч?

3) Сколько раз в течение трёх дней температура была 9 °C?

4) Определите наименьшую температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье.

12. Из квадрата со стороной 10 см вырезаны квадратики со стороной x см, и из полученной фигуры сделана открытая коробка (рис. 10). Выразите объём V (см^3) этой

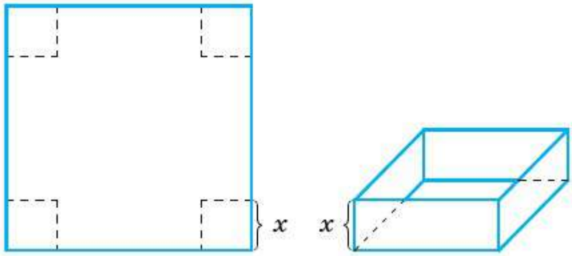


Рис. 10

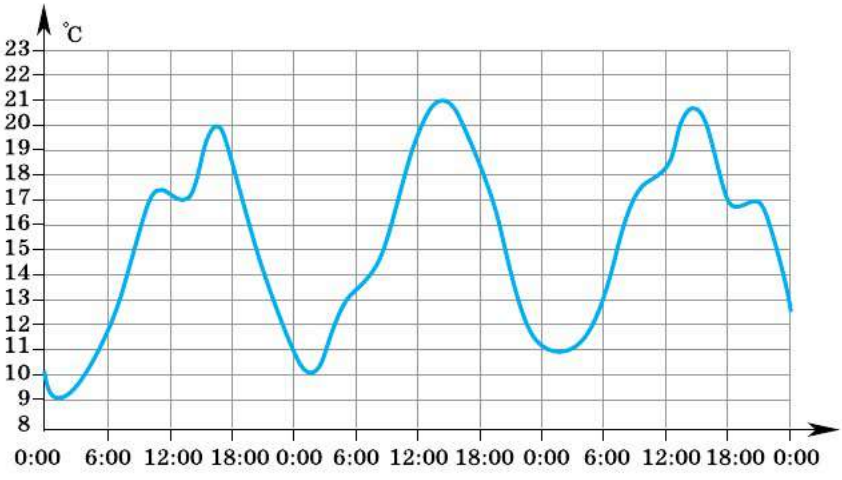


Рис. 11

коробки через x. Укажите область определения функции $y = V(x)$.

13. Постройте график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой выполняются условия:
1) $D(f) = [-1; 5]$, $E(f) = [-3; 3]$;
2) $D(f) = [-3; 2]$, $E(f) = [-2; 4]$.

14. На графике (рис. 11) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия.
1) Когда была самая высокая, а когда самая низкая температура?
2) Какая температура воздуха была в воскресенье в 12 ч?
3) Сколько раз в течение трёх дней температура достигала 17 °C?
4) Определите наименьшую температуру воздуха в ночь с воскресенья на понедельник.

15. В математике за некоторыми числовыми множествами закреплены стандартные обозначения: $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, $\boldsymbol{R}_+$ — множество положительных действительных чисел.

Вставьте вместо многоточия один из знаков «$\cap$», «$\cup$», «$\subset$» так, чтобы получилось верное утверждение:
1) $\boldsymbol{N}\ldots\boldsymbol{Q}$; 2) $\boldsymbol{N}\ldots\boldsymbol{R}_+$; 3) $\boldsymbol{N}\ldots\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$; 4) $\boldsymbol{R}_+\ldots\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$.

! Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях одна переменная является функцией другой?

2. Что такое естественная область определения функции?

3. Приведите пример функции, нуль которой больше, чем $f(0)$.

4. Найдите $D(y)$ и $y(3)$, если $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

2. Прямая, гипербола, парабола и окружность

С линиями, названия которых приведены в заглавии этого пункта, вы не раз встречались. В нашем курсе им также отводится важная роль. Следующие три рисунка напомнят вам о линейной функции.

Прямая на рисунке 12 представляет собой график линейной функции $y = kx + l$ при $k > 0$, $l > 0$, на рисунке 13 — при $k < 0$, $l > 0$, а линейная функция на рисунке 14 задаётся формулой $y = l$, в которой, вообще, как бы нет аргумента. На самом деле угловой коэффициент k этой прямой равен нулю: $y = 0 \cdot x + l$.

> Функция, которая при всех значениях аргумента принимает одно и то же значение, называется **константой** (или **постоянной**).

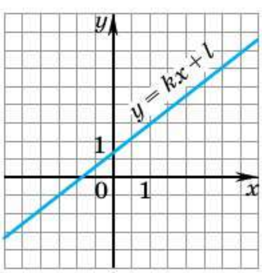


Рис. 12

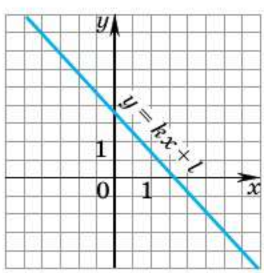


Рис. 13

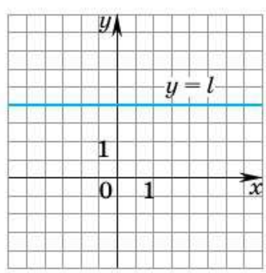


Рис. 14

Пример 1. Задать функцию, график которой параллелен прямой $y = 2x + 3$ и проходит через точку $(-5; 2)$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид $y = kx + l$. *Угловые коэффициенты параллельных прямых равны*, т. е. $k = 2$. Остаётся найти начальную ординату l. Поскольку координаты данной точки должны удовлетворять искомому уравнению, получим:

$$2 = 2 \cdot (-5) + l,\ l = 2 + 10 = 12.$$

Окончательно имеем: $y = 2x + 12$.

Ответ: $y = 2x + 12$.

▼ **Пример 2.** Задать линейную функцию, график которой проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Решение. Любая линейная функция задаётся уравнением $y = kx + l$. Подстановка в это уравнение координат первой точки приводит к уравнению общего вида прямых, проходящих через точку $(x_1; y_1)$: $\begin{cases} y = kx + l, \\ y_1 = kx_1 + l, \end{cases}$ $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Для определения k подставим в это уравнение координаты второй из данных точек: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Имеем: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Группируя игреки и иксы в разных частях уравнения, получим уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Примечание. В полученном уравнении знаменатели дробей должны отличаться от нуля. Однако никто не запрещает двум данным точкам иметь, например, равные ординаты: $y_2 = y_1$. В этом случае график линейной функции оказывается параллелен оси абсцисс и следует сразу написать искомое уравнение: $y = y_1$.

Если у данных точек совпадут абсциссы: $x_2 = x_1$, то уравнение соответствующей прямой $x = x_1$ не будет задавать функцию y (одному значению x в этом случае соответствует более одного значения y). △

На рисунке 15, *а* и *б* изображены графики функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ и при $k < 0$ — гиперболы, каждая из которых состоит из пары симметричных относительно начала координат ветвей.

Функция $y = \frac{k}{x}$ определена на множестве всех действительных чисел, кроме 0, т. е. на объединении промежутков: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Это же множество является и областью значений функции y.

Гипербола $y = \frac{k}{x}$ имеет две оси симметрии: прямые $y = x$ и $y = -x$.

Обратим внимание на важное свойство гиперболы $y = \frac{k}{x}$. При движении по графику от оси ординат расстояние от точек графика до оси абсцисс уменьшается, и график как бы сливается с осью абсцисс. Говорят, что *y стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности*.

Аналогично, когда x стремится к нулю, y стремится к *бесконечности* или к *минус бесконечности* (в зависимости от того, с какой стороны точка приближается к оси ординат).

Ось абсцисс и ось ординат называют соответственно *горизонтальной* и *вертикальной* ***асимптотами*** графика функции $y = \frac{k}{x}$.

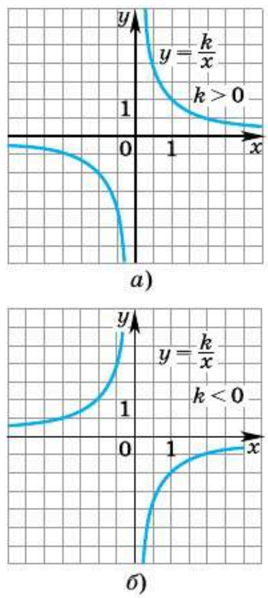


Рис. 15

На рисунке 16 изображена парабола — график ещё одной хорошо вам известной функции $y = x^2$. Ветви её направлены вверх, а вершина расположена в начале координат. Функция $y = x^2$ определена на множестве всех действи-

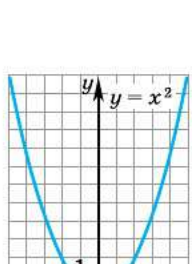


Рис. 16

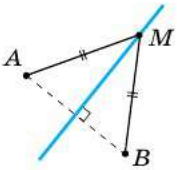


Рис. 17

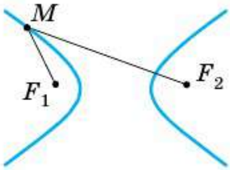


Рис. 18

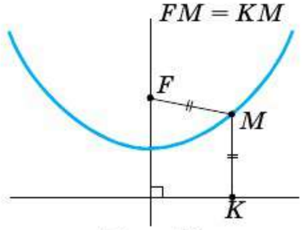


Рис. 19

тельных чисел, а областью её значений является множество неотрицательных чисел.

▼ В Древней Греции, где наиболее развитой частью математики была геометрия, прямую, гиперболу и параболу определяли как геометрические места точек[1] плоскости.

Прямая — геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек (рис. 17).

Гипербола — геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек равна данному числу (рис. 18).

Парабола — геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки и данной прямой (рис. 19). △

Понятие расстояния используется в математике часто. Полезно уметь выражать расстояние между двумя точками координатной плоскости через координаты этих точек.

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC (рис. 20), получим:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

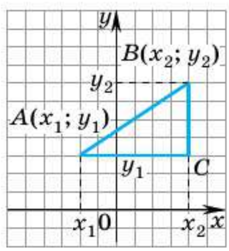


Рис. 20

[1] ***Геометрическим местом точек*** называют множество точек плоскости, для каждой из которых выполняется некоторое условие.

Пример 3. Записать уравнение окружности с центром в точке $K(3; 4)$, касающейся оси абсцисс.

Решение. Изобразим данную окружность (рис. 21). Центр окружности K отстоит от касательной к окружности на 4, значит, радиус окружности равен 4. Расстояние от произвольной точки окружности $M(x; y)$ до её центра $K(3; 4)$ равно 4:

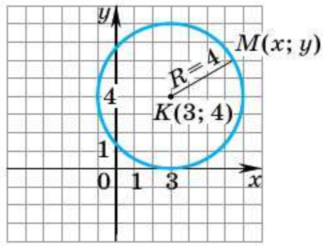


Рис. 21

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=4$$

или после *освобождения от корня*: $(x-3)^2+(y-4)^2=16$.

Ответ: $(x-3)^2+(y-4)^2=16$.

Примечание. Окружность не является графиком функции, поскольку для неё не выполняется требование однозначности выражения y через x, например прямая $x = 0$ пересекает данную окружность в двух точках, ординаты которых — корни уравнения $(0-3)^2+(y-4)^2=16$.

Упражнения

16. На графике (см. рис. 9) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов 11 июля. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику:

1) температуру воздуха 13 июля в 6 ч, 11 июля в 18 ч;

2) сколько раз в течение трёх дней температура поднималась до 12 °C;

3) до какой наибольшей температуры прогрелся воздух 13 июля, 11 июля.

17. Постройте график функции $y=-\frac{6}{7}x+3$. Найдите по графику:

а) координаты точек пересечения этого графика с осями координат;

б) значение функции при $x=-3{,}5$; $10{,}5$;

в) значение аргумента, которому соответствует $y = 1$; 12.

г) ● есть ли на графике точки, обе координаты которых — целые числа? Если есть, то сколько таких точек?

18. Постройте график функции $y = \frac{3}{4}x - 1$. Найдите по графику:
а) координаты точек пересечения этого графика с осями координат;
б) значение функции при $x = -4; -6; 2; 8$;
в) значение аргумента, которому соответствует $y = 1; 2; 5$.
г) есть ли на графике точки, обе координаты которых — натуральные числа? Если есть, то сколько таких точек?

19. Найдите k и l, если известно, что прямая $y = kx + l$:
1) параллельна прямой $y = 0{,}3x$ и проходит через точку: а) $A(0; 7)$; б) $B(0; 8)$; в) $C(2; 5)$; г) $D(-5; 6)$;
2) параллельна прямой $y = 0{,}75x + 11$ и проходит через точку: а) $K(8; 1)$; б) $M(4; 9)$;
3) параллельна прямой $y = -\frac{3}{7}x - 6$ и проходит через точку: а) $P(7; 4)$; б) $E(3; 0)$.

20. Каково примерное расположение графика функции $y = kx + l$, если:

1) $k > 0, l > 0$;	4) $k < 0, l < 0$;	7) $k = 0, l > 0$;
2) $k < 0, l > 0$;	5) $k > 0, l = 0$;	8) $k = 0, l < 0$;
3) $k > 0, l < 0$;	6) $k < 0, l = 0$;	9) $k = 0, l = 0$?

21. Опишите примерное расположение прямой $y = kx + l$ и определите знаки k и l, если график расположен в координатных четвертях:
1) в I, II и III; 2) в I, II и IV; 3) в I, III и IV; 4) во II, III и IV.

22. Может ли график линейной функции $y = kx + l$ располагаться только:
1) в I и II координатных четвертях;
2) во II и IV координатных четвертях;
3) в III и IV координатных четвертях;
4) в I и III координатных четвертях;
5) в I и IV координатных четвертях;
6) во II и III координатных четвертях?

23. Задайте аналитически линейную функцию, график которой проходит через точки:
1) $A(-1; 2)$ и $B(1; -1)$;
2) $A(-3; -5)$ и $B(2; 4)$;
3) $A(-5; 13{,}5)$ и $B(17; 13{,}5)$.

24. 1) Не выполняя построения графика функции $y = \frac{3}{4}x + 9$, определите:

а) координаты точек его пересечения с осями координат;
б) принадлежит ли графику точка:
$A(100; 84)$, $B(-0{,}05; -7{,}9)$, $C(-30; 30{,}5)$.
в) есть ли на графике точка, абсцисса которой равна её ординате.

2) Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{2}{5}x - 8$, определите:

а) координаты точек его пересечения с осями координат;
б) принадлежит ли графику точка:
$A(50; 12)$, $B(-0{,}05; -7{,}98)$, $C(52; 28)$.
в) есть ли на графике точка, абсцисса и ордината которой — противоположные числа.

25. 1) Прямая $y = 3x + l$ проходит через точку $A(17; 30)$. Найдите l и определите, проходит ли эта прямая через точку $B(25; 54)$.
2) Прямая $y = -2{,}5x + l$ проходит через точку $M(-20; 66)$. Найдите l и определите, проходит ли эта прямая через точку $C(20; 36)$.

26. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. р.) задаётся формулой: $q = 260 - 20p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. р.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = qp$ составит не менее 720 тыс. р.

27. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле: $\pi(q) = q(p - v) - f$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 500$ р. за штуку, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ р. за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 900\,000$ р. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 600 000 р. в месяц.

28. Найдите число k, если известно, что график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку:

1) $M(10; 0{,}4)$; 2) $E(-1{,}2; 15)$.

29. График функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A(16; 2{,}5)$. Проходит ли он через точку:

1) $P(-8; -5)$; 2) $M(12{,}5; 3{,}2)$?

30. Точка $C(a; b)$ принадлежит графику функции:

1) $y=kx$; 2) $y=\frac{k}{x}$.

Принадлежит ли этому графику точка:

а) $A(-a; -b)$; в) $C(0{,}1a; 10b)$; д) $P(b; a)$;

б) $B\left(2a; \frac{1}{2}b\right)$; г) $M(3a; 3b)$; е) $F(-b; a)$?

31. 1) Постройте в одной системе координат графики функций:

а) $y=x$ и $y=\frac{1}{x}$; г) $y=0{,}5x+1$ и $y=x^2$;

б) $y=-2x$ и $y=\frac{-2}{x}$; д) $y=\frac{1}{x}$ и $y=x^2$;

в) $y=2x-2$ и $y=\frac{4}{x}$; е) $y=\frac{-4}{x}$ и $y=x^2$.

2) Укажите координаты точек пересечения графиков.

32. Имеет ли асимптоты график функции:

1) $y=\frac{3}{2|x|}$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$?

33. Сколько общих точек могут иметь графики:

1) линейной функции и функции $y=\frac{k}{x}$;

2) параболы $y=x^2$ и гиперболы $y=\frac{k}{x}$?

Ответы подтвердите схематическими рисунками.

34. Задайте аналитически функцию, график которой представляет собой множество точек координатной плоскости, равноудалённых от точек:

1) $A(-1; 2)$ и $B(1; -2)$; 3) $A(13{,}5; -2)$ и $B(13{,}5; 5)$;

2) $A(-3; -5)$ и $B(1; 3)$; 4) $A(2; 4)$ и $B(3; 6)$.

35. Запишите уравнение окружности с центром в точке $K(2; -3)$, касающейся:
1) оси абсцисс;
2) оси ординат.

36. Запишите уравнение окружности с радиусом, равным 5, центр которой расположен:
1) в точке $K(4; 4)$;
2) в точке $M(-2; 3)$;
3) на прямой $y = x$;
4) на прямой $y = -x$.

Контрольные вопросы и задания

1. Все ли прямые, проходящие через точку $A(2; 1)$, можно задать уравнениями вида

$$y - 1 = k(x - 2)?$$

2. Найдите координаты точек пересечения прямой $y = 12x - 11$ и параболы $y = x^2$.

3. Запишите уравнение, задающее геометрическое место точек, равноудалённых от точек $A(2; 0)$ и $B(5; 3)$.

3. Непрерывность и монотонность функций

Графики линейной функции и функции $y = x^2$ представляют собой сплошные непрерывные линии, которые можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги. Поэтому и сами эти функции называют ***непрерывными***.

В отличие от них, график функции $y = \frac{k}{x}$ состоит из двух изолированных непрерывных ветвей. Говорят, что функция $y = \frac{k}{x}$ непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а при $x = 0$ имеет разрыв.

Пример 1. Является ли непрерывной функция

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ при } x \geqslant 1, \\ 3 - x, \text{ при } x < 1? \end{cases}$$

Решение. Данная функция на разных промежутках задаётся разными выражениями. Такие функции называют ***кусочно-заданными***.

Понятно, что на промежутке $(1; +\infty)$ данная функция не имеет *точек разрыва*. Непрерывна она и на промежутке $(-\infty; 1)$.

Значит, остаётся выяснить, как выглядит её график в непосредственной близости от точки с абсциссой 1, как говорят, *в окрестности точки* 1.

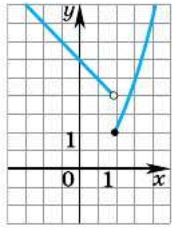


Рис. 22

График данной функции (рис. 22) состоит из части прямой $y = 3 - x$ и части параболы $y = x^2$. Когда абсциссы точек левой части графика приближаются к 1, их ординаты приближаются к числу 2. Правая же ветвь графика начинается в точке $(1; 1)$. При переходе от левой ветви графика к правой придётся оторвать карандаш от бумаги. Значит, функция

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ при } x \geqslant 1, \\ 3 - x, \text{ при } x < 1 \end{cases}$$

имеет разрыв в точке $x = 1$.

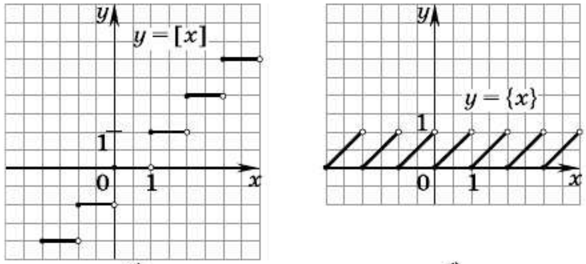
Ответ: функция имеет разрыв.

Примечание. Все функции, заданные аналитически (формулами), с которыми вы встречались в курсе математики: $y = P(x)$, $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $y = \sqrt{P(x)}$ и т. п., где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, *непрерывны на любом промежутке, входящем в область их определения.*

▼ Познакомимся с двумя функциями, имеющими бесконечное множество точек разрыва. Уже в 5 классе при записи неправильных дробей в виде смешанных чисел вы встретились с понятиями целой и дробной частей числа. Например, $\dfrac{14}{3} = 4 + \dfrac{2}{3}$. Здесь 4 — целая часть, а $\dfrac{2}{3}$ — дробная часть числа $\dfrac{14}{3}$.

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

Для обозначения целой части используются квадратные скобки: $[x]$ — *целая часть* числа x. *Дробную часть* числа $\{x\}$ можно определить через само число x и его целую часть $[x]$: $\{x\} = x - [x]$.



а)   б)

Рис. 23

Примечание. Из определения целой и дробной частей числа следует, что:

1) целая часть целого числа равна самому числу. В этом случае дробная часть оказывается равной нулю;

2) дробная часть числа не обязательно является дробным числом. Вы уже видели, что она может оказаться равной целому числу 0, дробная часть может представлять собой и иррациональное число: $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$.

Рассмотрим функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$. Обе они определены на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел. Значением первой из них может быть любое целое число, а значения второй функции заполняют промежуток $[0; 1)$. На графиках этих функций (рис. 23) видно, что все целые числа являются их точками разрыва. △

С непрерывностью функций связано полезное при решении различных задач утверждение, которое является теоремой.

Теорема о промежуточном значении

Если непрерывная на отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то по крайней мере в одной точке этого отрезка она обращается в нуль.

Это утверждение становится совершенно очевидным, если обратиться к графической интерпретации: непрерывная линия, соединяющая точки верхней и нижней координатных полуплоскостей, пересекает ось абсцисс (рис. 24).

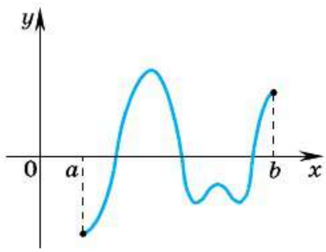


Рис. 24

Заметим, что если непрерывная на промежутке функция не обращается в нуль ни в одной его точке, то на этом промежутке она сохраняет знак. Таким образом, *перемена знака любой функции может происходить только при переходе её через нуль, или точку разрыва*. На этом свойстве функций основан приём решения неравенств, называемый ***методом интервалов***.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{10(x^2+16x-26)}{3(x^2-5x+2)} > 0.$

Решение. Найдём промежутки, на которых функция $y = \dfrac{10(x^2+16x-26)}{3(x^2-5x+2)}$ сохраняет знак. В данном случае границами её *промежутков знакопостоянства* являются нули числителя и нули знаменателя дроби $\dfrac{10(x^2+16x-26)}{3(x^2-5x+2)}$.

Нули числителя: 1 и –2,6, нули знаменателя: 1 и $\dfrac{2}{3}$. Таким образом, точки разрыва функции y — точки 1 и $\dfrac{2}{3}$, а её нуль — точка –2,6.

Эти точки разбивают координатную прямую на четыре интервала (рис. 25, *а*), на каждом из которых функция y сохраняет знак. Остаётся эти знаки определить. Для этого можно вычислить значение функции в какой-нибудь точке каждого интервала. Но можно использовать и другие соображения. Так, например, зная, что каждый из квадратных трёхчленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби, справа от своего большего корня принимает положительные значения, можно определить знак функции на самом правом интервале (рис. 25, *б*).

Каждый из данных квадратных трёхчленов меняет знак при переходе через свой корень. Значит, при переходе через их общий корень 1 знак изменят и числитель, и знаменатель дроби, а сама дробь при этом свой знак сохранит (рис. 25, *в*). При переходе через точку $\dfrac{2}{3}$ знак изме-

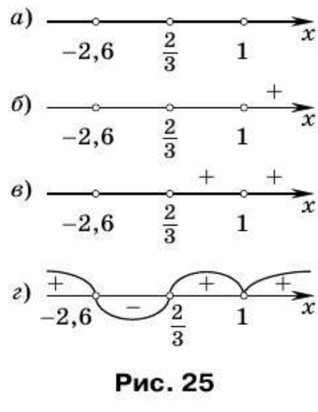


Рис. 25

нит только знаменатель, а при переходе через точку $-2{,}6$ изменит знак только числитель. Каждый из этих переходов приведёт к изменению знака всей дроби, что можно показать с помощью ***кривой знаков*** (рис. 25, *г*).

Ответ: $(-\infty; -2{,}6) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Примечание. Ответ можно записать с помощью простейших неравенств:

$$x < -2{,}6, \quad \frac{2}{3} < x < 1, \quad x > 1.$$

Теорема о промежуточном значении позволяет установить, что на некотором промежутке имеется нуль функции $y = f(x)$, но из неё не следует, что этот нуль единственный. А такая информация была бы очень полезна, например, при решении уравнений, когда нужно найти *все* корни уравнения $f(x) = 0$. В таких случаях на помощь приходят другие свойства, которыми обладают некоторые функции.

Рассмотрим линейную функцию $y = kx + l$ при $k > 0$ (рис. 12). Легко видеть, что с увеличением значения аргумента увеличивается (возрастает) и значение функции. Функции, обладающие таким свойством, называют *возрастающими*.

При $k < 0$ (рис. 13) с увеличением значения аргумента значение линейной функции уменьшается (убывает). Такие функции называют *убывающими*.

Конечно, не только линейные функции являются возрастающими или убывающими. Так, например, известная вам функция $y = x^3$, графиком которой является кубическая парабола (рис. 26), является возрастающей, она возрастает на всей своей области определения. На всей своей области определения возрастает и функция $y = \sqrt{x}$ (рис. 27).

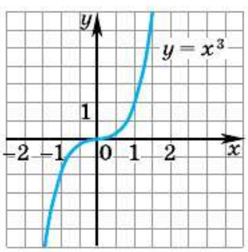


Рис. 26

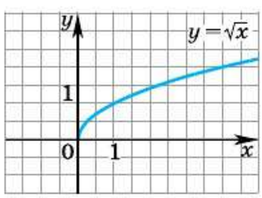


Рис. 27

Часто, однако, встречаются функции, которые на одних промежутках возрастают, а на других убывают. Так, например, функция $y = x^2$ (см. рис. 16) на промежутке $(-\infty; 0]$ убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей на некотором промежутке**, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей на некотором промежутке**, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называют **монотонными**, а промежутки возрастания и убывания называют **промежутками монотонности**.

Вернёмся к вопросу о единственности корня. Пусть некоторая непрерывная функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a; b]$ и принимает в его концах значения разных знаков. Тогда на этом отрезке она имеет единственный нуль, т. е. уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[a; b]$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x^3} + x - 12 = 0$.

Решение. Непрерывная функция $y = \sqrt{x^3} + x - 12$ является возрастающей (при увеличении x увеличиваются значения каждого из выражений: x^3, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^3} + x$ и $\sqrt{x^3} + x - 12$). Проще всего найти её значение при $x = 0$. Это значение отрицательно, а, например, при $x = 12$ значение функции положительно. Значит, единственный корень уравнения принадлежит отрезку $[0; 12]$. В данном случае его легко подобрать:

$$\sqrt{4^3} + 4 - 12 = 8 + 4 - 12 = 0.$$

Ответ: 4.

Примечание. Монотонная функция каждое своё значение принимает только один раз (т. е. при одном значении аргумента). Значит, уравнение $f(x) = a$, где a некоторое число, а $f(x)$ монотонная функция, либо не имеет корней, либо имеет единственный корень.

Упражнения

37. Найдите промежутки, на которых непрерывна функция:

1) $y = \dfrac{1}{5x + 7}$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$;

3) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4x + 4}$;

4) $y = \dfrac{2x + 3}{3x^2 - 7x + 4}$.

38.° Найдите точки разрыва функции:

1) $y = \dfrac{|x - 5|}{x^3 - 8x^2 + 15x}$;

2) $y = \dfrac{|x + 5|}{x^3 + 9x^2 + 14x}$.

39. Найдите $f(-1)$, $f(-0,5)$, $f(0)$, если:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ где } -1 \leqslant x < 0, \\ x^2, \text{ где } 0 \leqslant x < 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ где } -2 \leqslant x < -1, \\ 2 - x, \text{ где } -1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

40. Найдите значение функции $y = |x|$ при $x = 1$ и $x = -0,5$.

41. 1) Постройте график кусочно-заданной функции:

а) $y = \begin{cases} x \text{ при } x < 0, \\ x^2 \text{ при } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ x^2 \text{ при } x < 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 3x - 1 \text{ при } x \leqslant 1, \\ x^2 \text{ при } x > 1; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 2x + 1 \text{ при } x \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{x} \text{ при } 0 < x < 1. \end{cases}$

2) Имеет ли эта функция разрыв? В каких точках?

42.° Приведите пример функции, непрерывной: 1) при всех значениях x; 2) при всех значениях x, кроме $x = 2$; 3) при всех значениях x, кроме $x = 2$; 5 и 9.

43. Докажите, что уравнение $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет корень на промежутке $[0; 2]$.

44. Решите неравенство:

1) $x(x - 1)(x + 8) > 0$;

2) $\dfrac{x + 3}{x(x - 7)} \leqslant 0$;

3) $\dfrac{(y + 3)(3y - 2)}{y(y - 7)} > 0$;

4) $(5y - 6)(3y + 5)(y - 3)(y + 1) \leqslant 0$.

45. Решите неравенство:

1) $\frac{t-1}{3t+2}+\frac{2-t}{3t+1}\leqslant 0$;

2) $\frac{2z+1}{z+3}+\frac{6z-1}{5-3z}\geqslant 0$;

3) $\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2x+1}{x+1}<1$;

4) $\frac{2y+1}{y+2}+\frac{1-5y}{y-3}\geqslant -3$.

46. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$;

2) $y=\sqrt{(x+2)(x^2-4)}$.

47. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком (см. рис. 3—8, с. 11—12). Запишите промежутки возрастания и убывания этой функции.

48. На графике (рис. 28) показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля при температуре окружающего воздуха 10 °С. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Когда температура достигает определённого значения, включается вентилятор, охлаждающий двигатель, и температура начинает понижаться.

1) Сколько минут прошло от момента запуска двигателя до включения вентилятора?

2) При какой температуре двигателя включился вентилятор?

3) Запишите промежутки возрастания и убывания температуры двигателя.

49. Изобразите график какой-нибудь непрерывной функции, зная, что:

1) а) функция определена на промежутке $[-3; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 3]$;

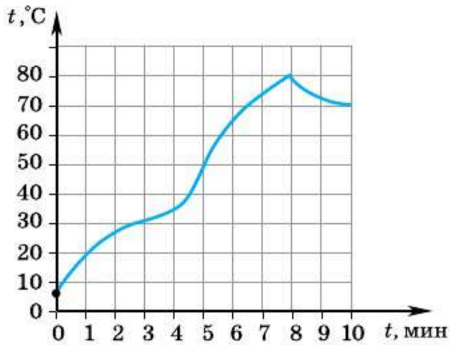


Рис. 28

в) функция возрастает на промежутке $[-3; 0]$, а убывает на промежутке $[0; 4]$;
г) нули функции: -1 и 2;

2) а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-1; 4]$;
в) функция возрастает на промежутке $[-1; 1]$, а убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[1; 3]$;
г) нули функции: -1 и 2.

50. Какие из следующих функций являются возрастающими, какие — убывающими?

1) $y = 2x + 1$;
2) $y = 5 - 0{,}5x$;
3) $y = x^2 + 1$;
4) $y = x^3 + x$;
5) $y = x^3 + \sqrt{x}$;
6) $y = x(3 + x)$;
7) $y = x^2\sqrt{x + 2}$;
8) $y = 4 - x^2$;
9) $y = -x - x^3$.

51. Докажите, что уравнение $f(x) = g(x)$, где $y = f(x)$ возрастающая, а $y = g(x)$ убывающая функции, либо не имеет корней, либо имеет единственный корень.

52. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = 5$;
2) $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 1} = 7$;
3) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 2} = 19 - 2x$;
4) $\sqrt{x - 9} + \sqrt{x} = 14 - \frac{x}{5}$.

53. Докажите, что уравнение $3x^3 + 2x - \frac{1}{x} = 0$ на промежутке $[0{,}5; 2]$ имеет единственный корень.

! Контрольные вопросы и задания

1. Изобразите график какой-нибудь функции, определённой на отрезке $[-3; 4]$, так, чтобы на промежутках $[-3; 1)$ и $[1; 4]$ она была непрерывной, а в точке $x = 1$ имела разрыв.

2. Какой смысл имеют «пустой» и чёрный кружки на графике функции, изображённом на рисунке 22 (с. 24)? Как следует изменить задание этой функции, чтобы кружки поменялись местами?

3. Изобразите график какой-нибудь функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[1; 4]$, так, чтобы одновременно выполнялись условия:
1) $x = 3$ — нуль функции;

2) функция убывает на отрезке [1; 2] и возрастает на отрезке [2; 4].

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$ на отрезке [1; 4]? В какой точке функция принимает своё наименьшее значение?

4. Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков

Умение строить графики функций, рассмотренных в предыдущем пункте, часто помогает в построении более сложных графиков. Наиболее яркий из знакомых вам примеров преобразования графиков — получение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ из графика функции $y = x^2$. Вспомним это преобразование.

1. Если a положительно, то при переходе от графика $y = x^2$ к графику $y = ax^2$ первый график как бы растягивается от оси абсцисс в a раз. На рисунке 29 показаны графики функций $y = ax^2$ при некоторых значениях a.

Примечание. Обычно не говорят: «Растянуть в 0,5 раза». Естественнее в таких случаях сказать: «Сжать в 2 раза». Это, правда, не поможет, когда a будет равно, например, $\frac{2}{3}$.

Если a отрицательно, то сначала нужно перейти от графика $y = x^2$ к графику $y = -x^2$, симметричному относительно

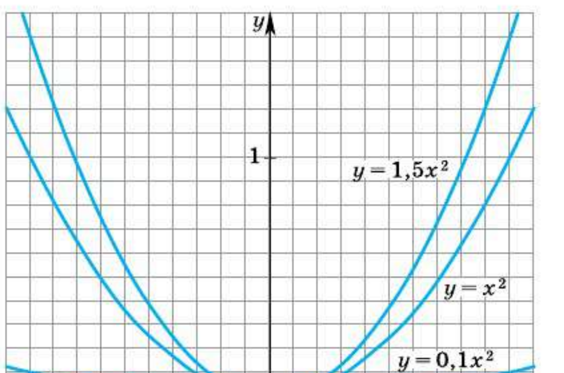


Рис. 29

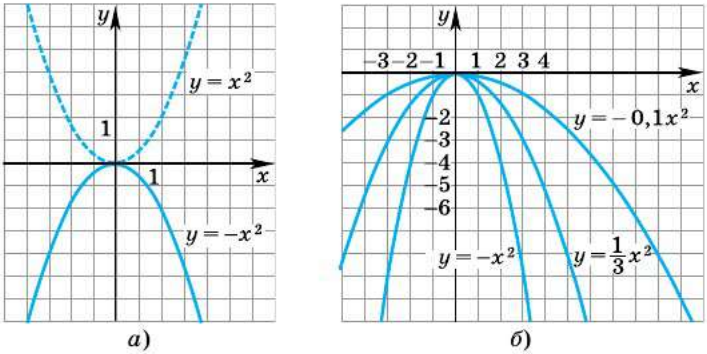


Рис. 30

оси абсцисс, а затем растянуть полученный график от оси абсцисс в $-a$ раз (рис. 30, *а*, *б*).

▼ Для тех, кто из курса геометрии знаком с понятием гомотетии, заметим, что график функции $y = ax^2$ получается из графика функции $y = x^2$ с помощью гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{a}$ (рис. 31). Отсюда, в частности, следует, что все параболы подобны. △

2. Переход от графика функции $y = ax^2$ к графику функции $y = ax^2 + bx + c$ можно осуществить с помощью двух переносов, параллельных осям координат.

Сначала выделим квадрат двучлена из выражения $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

где $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

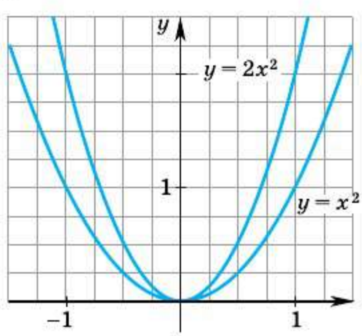


Рис. 31

Затем с помощью переноса на x_0, параллельно оси абсцисс, из графика функции $y = ax^2$ получим график функции $y = a(x - x_0)^2$, и, наконец, перенеся получившийся график параллельно оси ординат на y_0, придём к графику функции

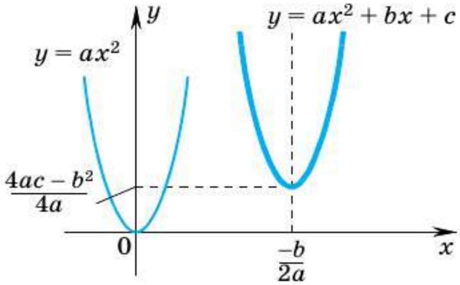


Рис. 32

$y = ax^2 + bx + c$ (рис. 32). Этот график представляет собой параболу с *вершиной* в точке с *координатами* $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Зафиксируем в таблице преобразования графиков, которые встретились при построении графика квадратичной функции.

Исходный график	Преобразование	Новый график
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс	$y = -f(x)$
$y = f(x)$	Растяжение от оси абсцисс в k раз	$y = kf(x)$
$y = f(x)$	Перенос вдоль оси абсцисс на a	$y = f(x - a)$
$y = f(x)$	Перенос вдоль оси ординат на a	$y = f(x) + a$

Эти и другие преобразования часто используются при построении различных графиков.

Пример 1. Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{4x + 2}{2x - 1}$.

Решение. Преобразуем выражение $y = \frac{4x + 2}{2x - 1}$:

$$\frac{4x + 2}{2x - 1} = \frac{4x - 2 + 4}{2x - 1} = \frac{4x - 2}{2x - 1} + \frac{4}{2x - 1} = 2 + \frac{2}{x - 0{,}5}.$$

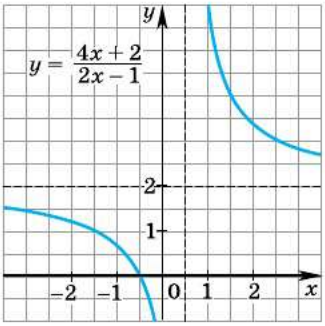


Рис. 33

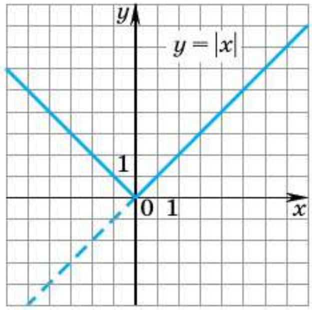


Рис. 34

График функции $y = \dfrac{2}{x - 0{,}5} + 2$ можно получить из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ с помощью цепочки преобразований:

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x - 0{,}5} \to \frac{2}{x - 0{,}5} \to \frac{2}{x - 0{,}5} + 2 \text{ (рис. 33).}$$

Заметим, что при построении графиков в тетради бывает удобно сдвигать не сам график, а оси координат. Так, вместо сдвига графика на 0,5 вправо можно сдвинуть ось ординат на 0,5 влево, а вместо сдвига графика вверх на 2 опустить на 2 ось абсцисс.

Полученный график имеет горизонтальную и вертикальную асимптоты: $y = 2$, $x = 0{,}5$.

Функция $y = \dfrac{4x+2}{2x-1}$ определена на объединении интервалов $(-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$, непрерывна и убывает на каждом из интервалов $(-\infty; 0{,}5)$ и $(0{,}5; +\infty)$.

Пример 2. Построить график функции $y = |x|$.

Решение. Будем преобразовывать график функции $y = x$.

(1) Заметим, что все точки графика $y = x$ с неотрицательными абсциссами принадлежат графику $y = |x|$, т. е. при преобразовании графика остаются на месте.

(2) Поскольку $|-x| = |x|$, точки графика $y = |x|$ в левой полуплоскости симметричны его точкам в правой полуплоскости относительно оси ординат. Этими точками заменяется часть исходного графика $y = x$, расположенная в левой координатной полуплоскости (рис. 34).

Примечание 1. Проведённые рассуждения останутся справедливыми при преобразовании любого графика функции $y = f(x)$ в график функции $y = f(|x|)$.

Примечание 2. При построении графика функции $y = |x|$ можно рассуждать и по-другому. Так, поскольку постановка знака модуля не изменяет положительных чисел и нуля, а отрицательные числа заменяет на противоположные им, можно оставить на месте все точки графика $y = x$ в верхней полуплоскости. Точки же нижней полуплоскости заменить на симметричные им относительно оси абсцисс.

Дополним список преобразований графиков.

Исходный график	Преобразование	Новый график
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси ординат	$y = f(-x)$
$y = f(x)$	Симметрия относительно начала координат	$y = -f(-x)$
$y = f(x)$	Уничтожение части графика слева от оси ординат и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси ординат	$y = f(\|x\|)$
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс частей графика, расположенных в нижней полуплоскости	$y = \|f(x)\|$
$y = f(x)$	Уничтожение части графика под осью абсцисс и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси абсцисс	$\|y\| = f(x)$

Примечание 3. Последнее преобразование приводит к графику, который, вообще говоря, не является графиком функции y.

Пример 3. Построить график уравнения $|y| = x^2 - 2|x|$.

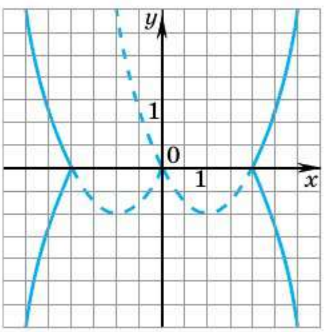


Рис. 35

Решение. Выполним цепочку преобразований графика функции $y = x^2 - 2x$:

$$y = x^2 - 2x \to y = |x|^2 - 2|x| \to |y| = |x|^2 - 2|x|$$

(рис. 35).

Упражнения

54. 1) Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 1$;
б) $y = x^2 - 4$;
в) $y = 2x - x^2$;
г) $y = 5 - 2x - 3x^2$;
д) $y = x^2 - 8x + 20$;
е) $y = 2 - x - x^2$.

2) Для каждой функции найдите область значений.

55. 1) Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = (x - 2)^2 + 1$;
б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$;
в) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 2}$;
г) $y = \dfrac{2x + 1}{x + 4}$.

2) Найдите наименьшее или наибольшее значение функции.

56. Найдите координаты вершины параболы:

1) $y = \dfrac{2}{3}x^2 + 6$;
2) $y = -\dfrac{3}{4}x^2 - 2$;
3) $y = x^2 - 4x + 1$;
4) $y = -x^2 - 6x + 5$;
5) $y = -2x^2 + 8x + 3$;
6) $y = -2x^2 - 8x + 3$;
7) $y = 2x^2 - 10x$;
8) $y = 0{,}5x^2 + 7x$.

57. Задайте уравнением какую-нибудь параболу с вершиной в точке: 1) $(0; 2)$; 2) $(2; 0)$; 3) $(-2; 3)$; 4) $(3; -2)$ так, чтобы ветви параболы были направлены: а) вверх; б) вниз.

58. Постройте график функции $y = f(x)$, если:

1) $f(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 2$;
2) $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x + 3$.

Найдите по графику:

а) $f(-1)$;
б) $f(2)$;
в) все значения x, при которых $f(x) = 6$;
г) все значения аргумента, при которых $f(x) > 6$;
д) промежутки возрастания и убывания функции;
е) наибольшее и наименьшее значения, которые принимает функция на промежутке $[-1; 7]$.

59. Изобразите схематически, каким может быть график функции $y = x^2 + bx + c$, если уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет:

1) два положительных корня;
2) два отрицательных корня;
3) единственный положительный корень;

4) единственный отрицательный корень;
5) оба корня на промежутке $[-1; 2]$;
6) ни одного корня на промежутке $[-1; 2]$.

60. При каких значениях k неравенство:
1) $2x^2 - 6x + k > 0$; 2) $kx^2 - 8x - 20 < 0$
а) верно при всех значениях x;
б) верно при всех значениях x, кроме одного;
в) неверно ни при каком значении x?

61. Определите знак числа a, если известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и $a - b + c > 0$.

62. Имеет ли корни уравнение:
1) $957x^2 - 4x - 23 = 0$; 3) $114x^2 - 497x + 379 = 0$;
2) $311x^2 - 821x + 431 = 0$; 4) $613x^2 + 812x + 135 = 0$?

63. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые принимает функция:
1) $y = \sqrt{2x^2 + 5x + 1}$ на промежутке $[3; 4]$;
2) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 5x + 13}$ на промежутке $[3; 6]$;
3) $y = \dfrac{6}{\sqrt{3 + x - \frac{1}{4}x^2}}$ на промежутке $[-1; 3]$;
4) $y = \dfrac{-6}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$ на промежутке $[2; 3]$.

64. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = 1{,}8 - 0{,}8t + 0{,}04t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

65. В прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вписан прямоугольник (рис. 36). Обозначив буквой x длину его стороны в сантиметрах, параллельной меньшему катету, выразите площадь S (см^2) прямоугольника. Укажите область определения и область значений функции $y = S(x)$.

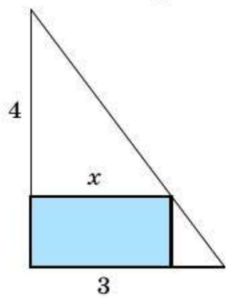


Рис. 36

66. 1) Постройте график дробно-линейной функции:

а) $y = 3 - \frac{2}{x}$;

б) $y = \frac{3}{x} - 2$;

в) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$;

г) $y = \frac{2 - 3x}{x - 1}$.

2) Напишите уравнения асимптот этого графика и укажите промежутки возрастания или убывания данной функции.

67. Перерисуйте в тетрадь график функции $y = f(x)$:

1) рис. 3; 2) рис. 4; 3) рис. 5; 4) рис. 6 (с. 11).

Преобразуйте его в график, заданный уравнением:

а) $y = 0{,}5f(x)$;

б) $y = f(x - 1)$;

в) $y = f(x) - 2$;

г) $y = -f(x)$;

д) $y = f(-x)$;

е) $y = -f(-x)$;

ж) $y = f(|x|)$;

з) $y = |f(x)|$.

Назовите преобразования, которые вы использовали.

68. 1) С помощью преобразований постройте график уравнения:

а) $y = -|x|$;

б) $y = |x + 3|$;

в) $y = 2 - |x|$;

г) $y = |x + 3| - 1$.

2) Назовите преобразования, которые вы использовали.

69. Закрасьте на координатной плоскости фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y \geqslant x^2 - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4, \\ y \geqslant |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \leqslant 4 - x^2, \\ y \leqslant x + 1, \\ 2y + x \geqslant 2. \end{cases}$

! Контрольные вопросы и задания

1. Задайте какую-нибудь функцию, графиком которой является парабола с вершиной в точке $(-3; 4)$, ветви которой направлены вниз.

2. Задайте аналитически дробно-линейную функцию, асимптотами которой являются прямые $x = -1$ и $y = 2$. Сколько существует таких функций?

3. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ и укажите её свойства.

4. Запишите уравнение, график которого, изображённый на рисунке 37, получен с помощью преобразований параболы.

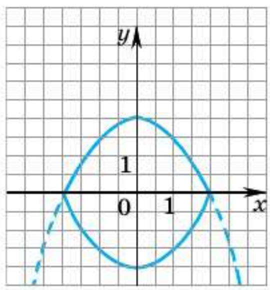


Рис. 37

Глава 2

СТЕПЕНИ И КОРНИ

Со степенными функциями $y = x^n$, где n — натуральное число, вы познакомились в курсе алгебры основной школы. В этой главе вы сначала повторите основные свойства степенных функций (п. 5), затем от квадратных корней перейдёте к корням натуральной степени n ($n \neq 1$) и научитесь применять их свойства (п. 6, 7). И, наконец, познакомитесь со степенями, показатели которых — дробные числа (п. 8).

5. Степенная функция $y = x^n$ при натуральном n

Рассмотрим две степенные функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и сравним их свойства (рис. 38, 39).

1. Обе эти функции определены и непрерывны на всей числовой прямой.

2. График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси ординат, а график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

Это свойство можно сформулировать иначе.

> При перемене знака аргумента значение функции $y = x^2$ не изменяется, а значение функции $y = x^3$ меняет знак.

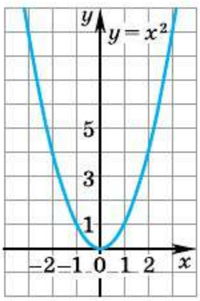


Рис. 38

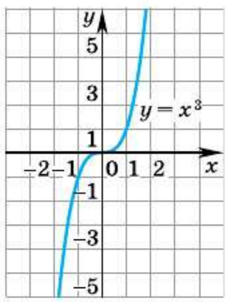
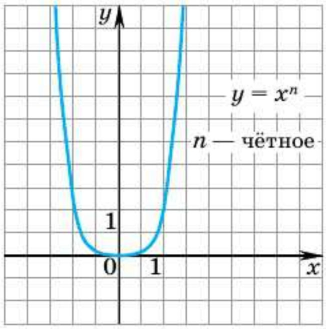
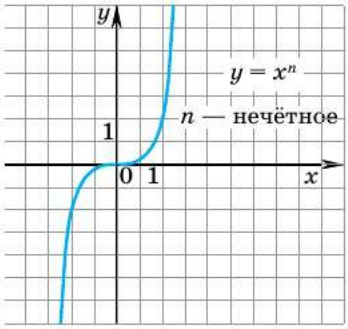


Рис. 39



а)



б)

Рис. 40

3. Область значений функции $y = x^2$ — все неотрицательные числа.

Область значений функции $y = x^3$ — все действительные числа.

4. Функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

На следующих двух рисунках изображены графики функций $y = x^n$ при чётном (рис. 40, *а*) и нечётном n (рис. 40, *б*).

Можно заметить, что при чётных n свойства степенных функций аналогичны свойствам функции $y = x^2$, а при нечётных — функции $y = x^3$.

Свойства функции $y = x^n$

1. Функция $y = x^n$ определена и непрерывна на всей числовой прямой.

2. График функции $y = x^n$ при чётном n симметричен относительно оси ординат, а при нечётном n симметричен относительно начала координат.

3. Область значений функции $y = x^n$ при чётном n — все неотрицательные числа, а при нечётном n — все действительные числа.

4. Функция $y = x^n$ при чётном n убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Функция $y = x^n$ при нечётном n возрастает на всей числовой прямой.

Свойством 2 обладают не только степенные функции, но названия этому свойству дали по степенным функциям.

Функция $y = f(x)$ называется **чётной**,
если выполняются два условия:

1) для любого значения x из $D(f)$ $-x$ тоже входит в $D(f)$;
2) $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется **нечётной**,
если выполняются два условия:

1) для любого значения x из $D(f)$ $-x$ тоже входит в $D(f)$;
2) $f(-x) = -f(x)$.

Пример. Доказать, что функция $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^3 - x}$ является нечётной.

Доказательство. Для доказательства нужно проверить выполнение двух условий из определения нечётной функции. 1) Найдём $D(y)$. Числитель дроби показывает, что $-2 \leqslant x \leqslant 2$, а знаменатель, — что $x \neq 0; \pm 1$.

Значит, $D(y) = [-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2]$. Найденное множество точек числовой прямой *симметрично относительно нуля*, следовательно, вместе с любым числом из этого множества в него входит и противоположное число.

2) $y(-x) = \dfrac{\sqrt{4 - (-x)^2}}{(-x)^3 - (-x)} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{-x^3 + x} = -\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^3 - x} = -y(x).$

Оба условия выполняются, а значит, функция $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x^3 - x}$ — нечётная, что и требовалось доказать.

Упражнения

70. Существует ли натуральное n, при котором график функции $y = x^n$ проходит через точку:

1) $A(7; 343)$;
2) $H(-2; -32)$;
3) $B(-6; 1296)$;
4) $C\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{32}{243}\right)$;
5) $D(-0{,}2; -0{,}0000001024)$;
6) $E(-3; -6561)$?

71. Каким натуральным числом, кроме 1, может быть показатель степени аргумента функции $y = x^n$, если известно, что при некотором целом значении x значение функции y равно:
1) 4; 2) 8; 3) –8; 4) 16; 5) 81; 6) 64; 7) –64?

72. В каких координатных четвертях расположен график функции:
1) $y = x^{11}$;
2) $y = x^{16}$;
3) $y = (x + 3)^7$;
4) $y = (x - 5)^{10}$;
5) $y = (x - 4)^{17} - 10$;
6) $y = (x + 6)^{24} + 1$?

73. 1) Может ли график функции $y = (x - a)^n + b$ иметь точки во всех координатных четвертях, если:
а) n — чётное натуральное число;
б) n — нечётное натуральное число?
2) Если может, приведите конкретные значения a, b и n.

74. Определите, если возможно, чётным или нечётным числом является показатель степени n функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^n$, зная, что:
1) $f(-5) > f(-3)$;
2) $f(-5) > f(3)$;
3) $f(-5) < f(-3)$;
4) $f(-5) < f(3)$;
5) $f(5) > f(-3)$;
6) $f(5) > f(3)$.

75. Сравните, если возможно, натуральные числа m и n, зная, что:
1) $1{,}3^m < 1{,}3^n$;
2) $0{,}3^m < 0{,}3^n$;
3) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^m < \left(\frac{3}{\pi}\right)^n$;
4) $(\sqrt{2})^m < (\sqrt{2})^n$;
5) $(1 - \sqrt{2})^m < (1 - \sqrt{2})^n$;
6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

76. 1) С помощью каких преобразований из графика функции $y = x^n$ можно получить график функции:
а) $y = -x^n$;
б) $y = 0{,}2x^n$?
2) Можно ли утверждать, что все три функции $y = x^n$, $y = -x^n$ и $y = 0{,}2x^n$ имеют одинаковую чётность (все они чётные или все они нечётные)?

77. Докажите, что функция является чётной:
1) $y = x^2 + 1$;
2) $y = 3x^6 - 3x^2 + 7$;
3) $y = \frac{x^6 + 8}{x^2}$;
4) $y = x^n \cdot x^{n+2} - 4$.

78. Докажите, что функция является нечётной:

1) $y = 3x^5 - 5x^3$; 2) $y = \dfrac{x^6 + 8}{x^3 - x}$; 3) $y = x^n \cdot x^{n+1} - x$.

79. 1) Является ли функция чётной, нечётной или она не является ни чётной, ни нечётной:

а) $y = \begin{cases} -x^2 \text{ при } x < 0, \\ x^2 \text{ при } x \geqslant 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} -(x+1)^2 \text{ при } x < 0, \\ (x-1)^2 \text{ при } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -x^3 \text{ при } x < 0, \\ x^3 \text{ при } x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} (x+1)^2 \text{ при } x < 1, \\ -(x-1)^2 \text{ при } x \geqslant 1? \end{cases}$

2) Постройте графики этих функций. Какая из функций имеет точку разрыва?

80. Представьте функцию в виде суммы чётной и нечётной функций:

1) $y = 4x^6 + 5x - 4$;

2) $y = \dfrac{|x| - 2x^3}{x^6 - 1}$.

81. Является ли: 1) сумма; 2) разность; 3) произведение; 4) частное чётной и нечётной функций с одинаковыми областями определения: а) чётной; б) нечётной функцией?

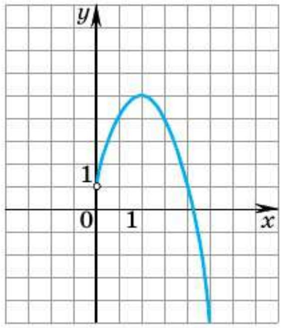


Рис. 41

82. 1) На рисунке 41 изображена часть параболы. Дополните её так, чтобы получившийся график задавал:

а) чётную функцию; б) нечётную функцию.

2) Задайте эту функцию формулой или кусочно и укажите промежутки её возрастания и убывания. Имеет ли эта функция точку разрыва?

! Контрольные вопросы и задания

1. Назовите свойства, общие для всех функций $y = x^n$, где n — натуральное число.

2. Назовите свойства функций $y = x^n$, различные для чётных и нечётных n.

3. Можно ли сделать вывод о том, что $m > n$, зная, что при некотором положительном a верно неравенство $a^m > a^n$? Укажите все положительные значения a, при которых этот вывод верен.

4. Является ли функция $y = 5x^5 - 3x^2 + x - 1$ чётной, нечётной или она не является ни чётной, ни нечётной?

6. Понятие корня n-й степени

По графику функции $y = x^2$ для любого положительного числа a можно найти числа, квадраты которых равны a. Эти числа называют *квадратными корнями* из a (рис. 42, *а*).

По графику функции $y = x^3$ для любого числа a можно найти такое число b, что $b^3 = a$ (рис. 42, *б*). Это число называют *кубическим корнем из* a или *корнем третьей степени из* a.

Вообще, по графику функции $y = x^n$ можно найти число, n-я степень которого известна.

> Число, n-я степень которого равна a, называют **корнем n-й степени** из a.

Так, корнем пятой степени из числа -32 является число -2, так как $(-2)^5 = -32$, а корнями четвёртой степени из числа 16 являются противоположные числа 2 и -2, так как $2^4 = (-2)^4 = 16$.

При любом a прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, отличное от 1, одну общую точку (рис. 43, *а*), абсцисса которой является корнем n-й степени из a. Этот корень обозначают $\sqrt[n]{a}$ (читается: корень n-й степени из a).

При любом положительном a прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, две общие точки (рис. 43, *б*), абсциссы которых являются корнями n-й степени из a. Один из этих корней положите-

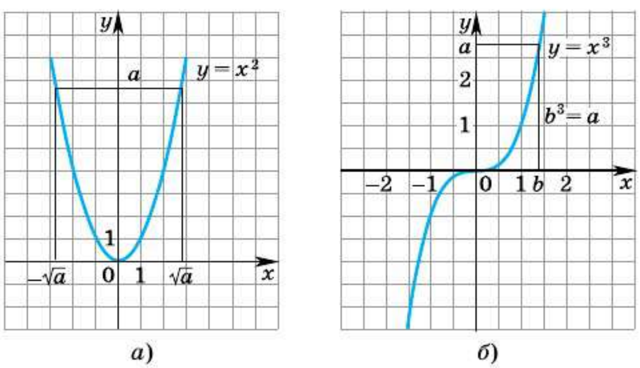


Рис. 42

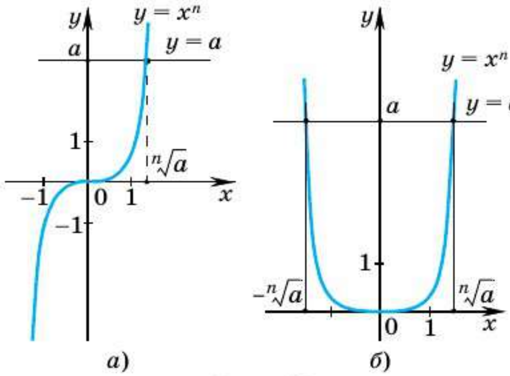


Рис. 43

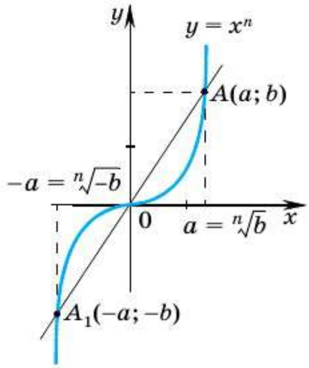


Рис. 44

лен, его обозначают $\sqrt[n]{a}$, другой — противоположное ему число, т. е. $-\sqrt[n]{a}$.

Корень чётной степени из 0 равен 0 ($0^n = 0$ при любом натуральном n):

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Любое число, возведённое в степень с чётным натуральным показателем, неотрицательно, следовательно, не существует корня чётной степени из отрицательного числа.

В записи $\sqrt[n]{a}$ число a называют ***подкоренным числом*** или ***подкоренным выражением***, а n — ***показателем степени корня***.

При записи квадратных корней показатель степени корня не указывают.

В зависимости от чётности или нечётности n выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет или не имеет смысл при отрицательных a. Из-за этого при проведении общих рассуждений относительно корней n-й степени приходится рассматривать два случая. Естественно поэтому при рассмотрении свойств ограничиться корнями из неотрицательных чисел — арифметическими корнями n-й степени. А корни нечётной степени из отрицательных чисел, которые при этом как бы остаются «за бортом», можно будет всегда выразить через арифметические: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, где n — нечётное число, $a > 0$. Это следует, например, из симметрии точек A и A_1 графика функции $y = x^n$ относительно начала координат (рис. 44). Так, например,

$$\sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}.$$

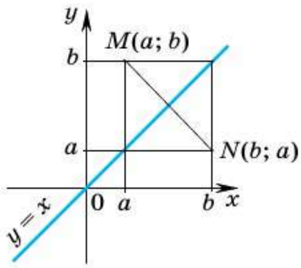


Рис. 45

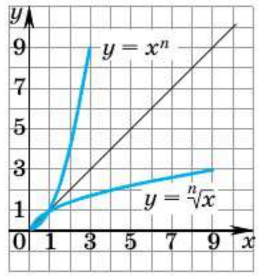


Рис. 46

Формула $y = \sqrt[n]{x}$ задаёт y как функцию x.

Для решения *обратной* задачи — нахождения значения переменной x по заданному значению y — из этой формулы можно выразить переменную x как функцию переменной y: $x = y^n$. Равенствам $x = y^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ удовлетворяют координаты одних и тех же точек (мы продолжаем рассматривать только неотрицательные значения x и y). Другими словами, *функции $y = \sqrt[n]{x}$ и $x = y^n$ имеют один и тот же график.*

И этот график можно получить, преобразовав график функции $y = x^n$.

Рассмотрим степенные функции $y = x^n$ и $x = y^n$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (напомним, что аргументом второй функции является переменная y). Пусть точка $M(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^n$, тогда $b = a^n$. Но из этого же равенства следует, что точка $N(b;\ a)$ принадлежит графику функции $x = y^n$. Прямая $y = x$ проходит через противоположные вершины квадрата с диагональю MN (рис. 45) и, значит, является его осью симметрии. Следовательно, точки $M(a;\ b)$ и $N(b;\ a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Аналогично можно показать, что любой точке графика функции $x = y^n$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика функции $y = x^n$ (рис. 46).

Таким образом, графики функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ (напомним, что функции $y = \sqrt[n]{x}$ и $x = y^n$ имеют один и тот же график) симметричны относительно прямой $y = x$. В дальнейшем встретятся и другие пары функций с симметричными относительно прямой $y = x$ графиками.

Функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, графики которых симметричны относительно прямой $y = x$, называют **взаимно обратными**, а каждую из таких функций — **обратимой**.

Рассматривая схематические графики взаимно обратных функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$, изображённые на рисунке 46, можно сформулировать некоторые основные свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ при $x \geqslant 0$.

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$

1. Функция возрастает, так как точка графика с большей абсциссой имеет и большую ординату.

2. График функции проходит через точки с координатами (0; 0) и (1; 1).

3. Из симметрии графиков функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ следует, что значения функции $y = \sqrt[n]{x}$ могут быть как угодно велики.

На рисунке 47 изображены графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ при $x \geqslant 0$ для n, равных 2; 3 и 4.

Можно заметить, что график той из функций $y = \sqrt[n]{x}$, у которой показатель степени корня n больше, на промежутке (0; 1) находится выше, а на промежутке $(1; +\infty)$ — ниже других.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt[8]{x^2 - 25}}{\sqrt{x+6} - 2} < 0$.

Решение. Подкоренные выражения должны быть неотрицательны:

$$\begin{cases} x^2 - 25 \geqslant 0, \\ x + 6 \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leqslant -5 \text{ или } x \geqslant 5, \\ x \geqslant -6, \end{cases} \qquad -6 \leqslant x \leqslant -5 \text{ или } x \geqslant 5.$$

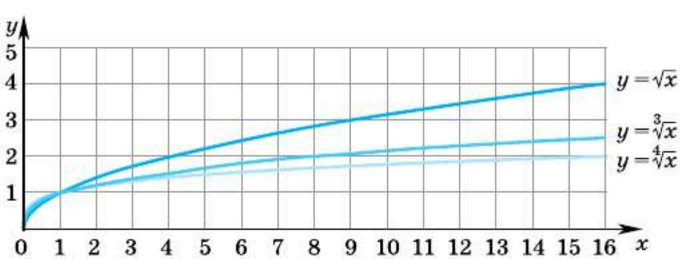


Рис. 47

При $-6 \leqslant x < -5$ или $x > 5$ числитель дроби положителен. Найдём нули знаменателя:

$$\sqrt{x+6} - 2 = 0, \quad \sqrt{x+6} = 2,$$
$$x + 6 = 4, \quad x = -2.$$

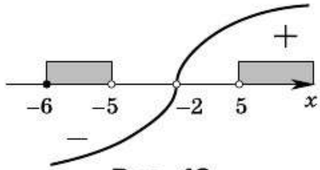


Рис. 48

При $x > -2$ значения знаменателя положительны, а при $-6 \leqslant x < -2$ — отрицательны. Значит, при $x > 5$ дробь принимает положительные, а при $-6 \leqslant x < -5$ — отрицательные значения (рис. 48).

Ответ: $-6 \leqslant x < -5$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$.

Примечание. Уравнения, в которых неизвестное стоит под знаком радикала, называют ***иррациональными***. Обычный способ решения — избавиться от радикалов, возводя обе части уравнения в степень. Однако при этом следует иметь в виду, что при возведении в чётную степень могут появиться лишние, так называемые ***посторонние корни***. Так, например, возводя в квадрат уравнение $\sqrt{x} = -1$, не имеющее корней, получим уравнение $x = 1$, корень которого не является корнем исходного уравнения — посторонний корень.

Решение. Перед тем как возводить данное уравнение в квадрат, полезно разнести радикалы по разным частям уравнения:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4, \quad \sqrt{2x+3} = 4 - \sqrt{x-2},$$
$$2x + 3 = 16 + x - 2 - 8\sqrt{x-2}, \quad 8\sqrt{x-2} = 11 - x.$$

Ещё раз возводим в квадрат:

$$64(x-2) = 121 + x^2 - 22x, \; x^2 - 86x + 249 = 0, \; x_1 = 3, \; x_2 = 83.$$

Теперь следует проверить, являются ли найденные числа корнями исходного уравнения, т. е. нет ли среди найденных корней посторонних.

Проверка.

1) Если $x = 3$, то $\sqrt{2 \cdot 3 + 3} + \sqrt{3 - 2} = 4$ — верно.

2) Если $x = 83$, то $\sqrt{2 \cdot 83 + 3} + \sqrt{83 - 2} = 4$ — неверно, так как уже первый корень больше 4.

Ответ: 3.

Примечание. Можно было подбором найти корень $x = 3$, и, поскольку левая часть уравнения задаёт возрастающую функцию, а правая — постоянная, сделать вывод об отсутствии других корней.

Пример 3. Решить *иррациональное неравенство*

$$\sqrt{x^2 + x - 12} > x.$$

Решение. Здесь также нужно избавиться от радикала. Однако в отличие от уравнений, при решении которых находят всего несколько чисел, решение неравенств обычно приводит к бесконечному множеству значений переменной, и проверить их все невозможно.

Будем рассуждать иначе. Заметим, что, когда правая часть данного неравенства отрицательна, неравенство верно, если, конечно, оно при этом имеет смысл. Значит, все решения системы $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 12 \geqslant 0 \end{cases}$ являются решениями данного неравенства.

Если же правая часть неравенства неотрицательна, то неравенство можно возвести в квадрат (по свойствам неравенств с неотрицательными частями):

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + x - 12 > x^2. \end{cases}$$

Таким образом, всё множество решений исходного неравенства является объединением решений двух систем.

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 12 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + x - 12 > x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant -4 \text{ или } x \geqslant 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > 12, \end{cases}$$

$$x \leqslant -4 \ \text{ или } \ x > 12.$$

Ответ: $x \leqslant -4$, $x > 12$.

Примечание. Свойства неравенств с положительными членами удобно использовать и при решении иррациональных уравнений, особенно когда проверка корней трудоёмка. На основании соответствующего свойства неравенств или определения квадратного корня, для проверки корней при решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ достаточно убедиться, что $g(x) \geqslant 0$.

Упражнения

83. Верно ли, что:
1) число -3 является корнем четвёртой степени из числа 81;
2) число $\frac{1}{2}$ является корнем третьей степени из числа $\frac{1}{8}$;
3) число 0,1 является корнем шестой степени из числа 0,000001;
4) число -10 является корнем пятой степени из числа $-100\,000$?

84. Найдите корни уравнения:
1) $x^2 = 10$;
2) $x^3 = 16$;
3) $x^5 = -43$;
4) $x^8 = 15$;
5) $(3 - 2x)^3 = 8$;
6) $(3x - 2)^5 = -32$;
7) $(5 - 3x)^6 = \frac{1}{64}$;
8) $(5x + 7)^4 = 81$;
9) $(x^2 - 5x + 2)^6 = 64$;
10) $(9x - x^2 - 4)^4 = 256$.

85. С помощью графика функции $y = x^3$ найдите приближённые значения кубических корней из чисел:
1) 5; 2) -7; 3) 4,7; 4) $-6{,}5$.

86. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ точка:
1) $A(3{,}375; 1{,}5)$; 2) $B(-0{,}125; -0{,}5)$; 3) $C(-343; -7)$?

87. Дана функция $y = \sqrt[n]{x}$. Найдите n, если график функции проходит через точку:
1) $A(-0{,}00032; -0{,}2)$; 2) $B(2187; 3)$.

88. Каким натуральным числом может быть n — показатель степени корня у функции $y = \sqrt[n]{x}$, если известно, что y принимает натуральное значение, когда аргумент x равен:
1) 4; 2) 8; 3) 27; 4) 16; 5) 81; 6) 64; 7) 1024?

89. Сравните натуральные числа m и n, зная, что:
1) $\sqrt[m]{1{,}7} < \sqrt[n]{1{,}7}$;
2) $\sqrt[m]{0{,}7} < \sqrt[n]{0{,}7}$;
3) $\sqrt[m]{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}$;
4) $\sqrt[m]{\frac{\sqrt{10}}{\pi}} < \sqrt[n]{\frac{\sqrt{10}}{\pi}}$.

90. 1) Задайте функцию, обратную данной:

а) $y = x$;

б) $y = \dfrac{1}{x}$;

в) $y = 2x - 1$;

г) $y = 5 - \dfrac{2}{3}x$.

2) Как связаны коэффициенты k_1 и k_2 взаимно обратных линейных функций $y = k_1x + l$ и $y = k_2x + m$?

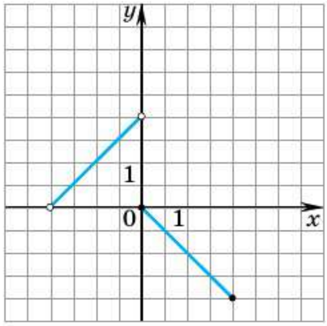


Рис. 49

91. Если функция $y = f(x)$, заданная рисунком 49, обратима, перерисуйте в тетрадь её график, и в той же системе координат изобразите график обратной ей функции $y = g(x)$.

92. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt[4]{10}$; 5) $\sqrt[3]{-15}$; 9) $\sqrt[4]{3}$;

2) $\sqrt[6]{18}$; 6) $\sqrt[5]{-5}$; 10) $\sqrt[5]{7}$;

3) $\sqrt[4]{-25}$; 7) $\sqrt[3]{-27}$; 11) $\sqrt[4]{5 - \sqrt{22}}$;

4) $\sqrt[6]{-8}$; 8) $\sqrt{5}$; 12) $\sqrt[12]{7 - 5\sqrt{2}}$?

93. Выразите через арифметический корень тот корень, который арифметическим не является:

1) $\sqrt[3]{-7}$; 3) $\sqrt[7]{-2}$; 5) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{2}}$;

2) $\sqrt[5]{-6}$; 4) $\sqrt[9]{-9}$; 6) $\sqrt[3]{3 - \sqrt{5}}$.

94. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{x}$; 5) $\sqrt{-x}$; 9) $\sqrt[4]{25 - x^2}$;

2) $\sqrt[8]{\dfrac{1}{x}}$; 6) $\sqrt{x + 2}$; 10) $\sqrt[6]{4x^2 - 1}$;

3) $\sqrt[10]{x^2}$; 7) $\sqrt[14]{2x - 5}$; 11) $\sqrt[8]{x^2 - x - 90}$;

4) $\sqrt[12]{\dfrac{1}{x^2}}$; 8) $\sqrt[7]{3 + 6x}$; 12) $\sqrt[16]{20x - x^2 + 96}$?

95. При каких значениях x не имеет смысла выражение:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-2}$; 3) $\dfrac{\sqrt[8]{x}}{x^2-4}$; 5) $\dfrac{\sqrt[10]{x^2-25}}{x+13}$;

2) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}+3}$; 4) $\dfrac{\sqrt[4]{x+3}}{9-x^2}$; 6) $\dfrac{\sqrt[10]{49-x^2}}{x+3}$?

96. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x}=\dfrac{2}{3}$; 3) $\sqrt[4]{2x+1}=0{,}2$; 5) $\sqrt[5]{x^2+7}=2$;

2) $\sqrt[5]{x}=\dfrac{1}{2}$; 4) $\sqrt[3]{2-5x}=0{,}6$; 6) $\sqrt[3]{x^3+37}=-3$.

97. Выясните с помощью графика, сколько корней имеет уравнение, и найдите приближённые значения этих корней:

1) $\sqrt{x}-3=x^2$; 3) $\sqrt{x+1}=x^2-7$;

2) $\sqrt[3]{x}=(x-1)^3$; 4) $x^3-1=\sqrt{x-1}$.

98.° Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x^2+5x+6}=1-x$;

2) $\sqrt{3x^2+7x+6}=x-1$;

3) $\sqrt{9x^2+16x}=2x+3$;

4) $\sqrt{5x^2-15x-1}=3-2x$;

5) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x}=1$;

6) $\sqrt{x}+\sqrt{13-x}=5$.

99. Решите графически неравенство:

1) $\sqrt{x}\geqslant x$; 3) $\sqrt{x}\geqslant 2x-1$;

2) $\sqrt{x}<x$; 4) $x^2\leqslant\sqrt{x}$.

100. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}\geqslant 0$.

101. Решите неравенство:

1) $\sqrt{9x-20} > x$;
2) $\sqrt{2x+15} \geqslant x$;
3) $x+2 < \sqrt{4+5x}$;
4) $x-1 \geqslant \sqrt{3x+7}$;
5) $\sqrt{x^2-x-12} < x$;
6) $\sqrt{13+8x-5x^2} \leqslant 4x$.

102. В боковой стенке высокого цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t (с) — время, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{300}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g = 10$ м/с — ускорение свободного падения. К какому моменту времени в баке останется воды не более чем четверть первоначального объёма? Ответ выразите в секундах.

103. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального — массой $m = 2$ кг и радиусом $R = 15$ см, и двух боковых с массами по $M = 1$ кг, радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки I (кг · см^2) относительно оси вращения определяется выражением $I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h (см) момент инерции катушки не превышает предельных для неё 625 кг · см^2?

! Контрольные вопросы и задания

1. Что означает запись $\sqrt[n]{a}$?

2. Почему при решении иррациональных уравнений необходимо делать проверку корней?

3. Решите иррациональное уравнение $\sqrt{11-2x} = 4 - x$. Объясните, почему при проверке корней достаточно было бы убедиться, что $4 - x \geqslant 0$.

4. К решению каких систем сводится решение иррационального неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$?

7. Свойства арифметических корней

Вы знакомы со свойствами квадратных корней. Аналогичными свойствами обладают и арифметические корни n-й степени.

Свойства арифметических корней

Свойства	Квадратные корни	Корни n-й степени
1	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3	$\sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

По определению арифметического корня n-й степени для любого неотрицательного числа a выполняется равенство

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a}$$

Следовательно, чтобы убедиться в справедливости равенства $\sqrt[n]{x} = y$, где $\sqrt[n]{x}$ — арифметический корень n-й степени, нужно проверить выполнение двух условий:

1) $y \geqslant 0$ и 2) $y^n = x$.

Докажем, например, что $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Должно быть: 1) $(\sqrt[n]{a})^m \geqslant 0$ и 2) $((\sqrt[n]{a})^m)^n = a^m$.

1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, как арифметический корень, значит, и $(\sqrt[n]{a})^m \geqslant 0$. (Заметим, что если m — целое отрицательное число или 0, то число a должно быть положительным.)

2) $((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$.

Оба условия выполняются, значит, верно равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня
$$\sqrt[3]{8a^5}.$$

Решение.
$$\sqrt[3]{8a^5} = \sqrt[3]{8a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{8a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{(2a)^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = 2a\sqrt[3]{a^2}.$$

Пример 2. Упростить выражение
$$(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{a}).$$

Решение. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:
$$(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{a}) =$$
$$= \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Пример 3. Сравнить $2\sqrt[3]{5}$ и $\frac{1}{2}\sqrt[3]{300}$.

Решение. $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40};$
$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{300} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{300} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 300} = \sqrt[3]{37{,}5}.$$

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастающая, т. е. бо́льшему подкоренному числу соответствует бо́льшее значение корня: $40 > 37{,}5$, следовательно, $\sqrt[3]{40} > \sqrt[3]{37{,}5}$.

Ответ: $2\sqrt[3]{5} > \frac{1}{2}\sqrt[3]{300}$.

Свойства 1—3 используются для преобразования арифметических корней одной и той же степени. Однако в одном выражении могут оказаться корни разных степеней.

Арифметические корни различных степеней связывают следующие два свойства.

4. $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$

5. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

Докажем свойство 5. Должны выполняться два условия:
1) $\sqrt[n]{a^m} \geqslant 0$ и 2) $(\sqrt[n]{a^m})^{nk} = a^{mk}$.
1) $\sqrt[n]{a^m} \geqslant 0$, как арифметический корень;
2) $(\sqrt[n]{a^m})^{nk} = ((\sqrt[n]{a^m})^n)^k = (a^m)^k = a^{mk}$.

Примечание. Если показатель степени подкоренного выражения делится на показатель степени корня, то свойство 5 записывается так: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Например, $\sqrt[7]{3^{28}} = 3^{\frac{28}{7}} = 3^4 = 81$.

Пример 4. Упростить выражение $\sqrt[7]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}$.

Решение. Внесём a^2 под знак кубического корня:

$$\sqrt[7]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{(a^2)^3 \cdot a}}.$$

Применим свойство 4 и упростим подкоренное выражение:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{(a^2)^3 \cdot a}} = \sqrt[21]{a^6 \cdot a} = \sqrt[21]{a^7}.$$

Применим свойство 5 (сократим показатель степени корня и показатель степени подкоренного выражения):

$$\sqrt[21]{a^7} = \sqrt[3 \cdot 7]{a^7} = \sqrt[3]{a}.$$

Ответ: $\sqrt[7]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a}$.

Пример 5. Представить в виде корня из числа выражение $\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{6}}$.

Решение. Приведём данные корни к одному и тому же показателю степени. Наиболее простым общим показателем является наименьшее общее кратное показателей степени корней — число 12.

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}; \quad \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3}; \quad \sqrt[6]{6} = \sqrt[12]{6^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{\sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{2^3}}{\sqrt[12]{6^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^4 \cdot 2^3}{6^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^4 \cdot 2^3}{3^2 \cdot 2^2}} = \sqrt[12]{3^2 \cdot 2} = \sqrt[12]{18}.$$

Упражнения

104. Докажите, что для арифметических корней верно равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

105. Вычислите:

1) $\sqrt{25 \cdot 81}$;
2) $\sqrt{49 \cdot 0{,}16}$;
3) $\sqrt[3]{\frac{5}{36}} : \sqrt[3]{\frac{6}{25}}$;
4) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$;
5) $\sqrt[3]{250 \cdot 32}$;
6) $\sqrt[5]{\frac{27}{125}} \cdot \sqrt[5]{\frac{9}{25}}$;
7) ○ $\sqrt[4]{125 \cdot 405}$;
8) ○ $\sqrt[4]{32 \cdot 648}$;
9) ○ $\sqrt{1{,}6 \cdot 12{,}1}$;
10) ○ $\sqrt[3]{1{,}25 \cdot 6{,}4}$;
11) ● $\sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}$;
12) ● $\sqrt[3]{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{6}}$.

106. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[11]{2^{12}}$;
2) $\sqrt[4]{2^{15}}$;
3) $\sqrt[3]{a^4}$;
4) $\sqrt[4]{b^9}$;
5) $\sqrt[5]{a^6 b^{11}}$;
6) ● $\sqrt[4]{-a^5}$;
7) ○ $\sqrt[3]{32x^{16}b^{10}}$;
8) ● $\sqrt[6]{-128a^{13}b^{14}}$;
9) ● $\sqrt{-243c^{10}d^7}$.

107. Представьте в виде корня с меньшим показателем:

1) $\sqrt[4]{4}$;
2) $\sqrt[6]{27}$;
3) ● $\sqrt[12]{16a^4}$;
4) $\sqrt[30]{8b^6}$;
5) $\sqrt[6]{64x^3}$;
6) $\sqrt[12]{16a^8}$;
7) ● $\sqrt[4]{(2 - \sqrt{5})^2}$;
8) ● $\sqrt[6]{(2\sqrt{6} - 5)^2}$;
9) ● $\sqrt[8]{(3\sqrt{5} - 7)^4}$.

108. Запишите с одним знаком радикала:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$;
2) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;
3) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$;
4) $\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}$;
5) ○ $\sqrt[4]{\frac{1}{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}}$;
6) ○ $\sqrt[5]{\frac{1}{a^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$.

109. Сравните:

1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[4]{8}$;
2) $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$;
3) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ и $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$;
4) $\sqrt[4]{8\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2\sqrt[4]{8}}$.

110. Представьте в виде корня:

1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{0{,}5}$;
2) $\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$;
3) $\sqrt[8]{1{,}5} : \sqrt[12]{3}$;
4) $\sqrt[6]{2{,}5} : \sqrt[4]{0{,}5}$;
5) $\sqrt[12]{0{,}5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{0{,}008}$;
6) $\sqrt[5]{0{,}6} : \sqrt[10]{9} \cdot \sqrt[4]{10}$.

111. Найдите корень уравнения:

1) $\sqrt{55 - 3x} = 7$;
2) $\sqrt{\frac{6}{2x - 7}} = \frac{1}{2}$;
3) $\sqrt{\frac{20 - 5x}{12}} = 2$;
4) $\sqrt[5]{6x + 56} = 2$;
5) $\sqrt{\frac{3}{5x - 30}} = \frac{1}{5}$;
6) $\sqrt{\frac{7x - 41}{2}} = 3$.

112. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \delta S T^4$, где $\delta = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $46{,}17 \cdot 10^{17}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

113. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на большие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле: $F_{\text{А}} = \rho g l^3$, где l — линейный размер аппарата (длина ребра куба), $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а $g = 9{,}8$ Н/кг — ускорение свободного падения. Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата (в м), чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 2 116 800 Н?

114.○ Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2+32} - 2\sqrt[4]{x^2+32} = 3$;

2) $\sqrt[3]{3x^4+16} - \sqrt[6]{3x^4+16} = 2$;

3) $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22$;

4) $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2+3x-6} = 0$;

5) $\sqrt[4]{x^3+1} - \dfrac{6}{\sqrt[4]{x^3+1}} = 1$;

6) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2} + \dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5} = 2$.

115.● Не решая уравнение:

1) $\sqrt{26-x} - \sqrt{12-x} = 2$, найдите значение выражения $\sqrt{26-x} + \sqrt{12-x}$;

2) $\sqrt{5x+39} + \sqrt{5x-8} = 10$, найдите значение выражения $\sqrt{5x+39} - \sqrt{5x-8}$.

116.● Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$; 2) $\sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-9} = 1$.

117. Решите систему уравнений:

1)○ $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3}, \\ xy = 9; \end{cases}$

2)○ $\begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

3)● $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28; \end{cases}$

4)● $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}\sqrt{x} = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$

118. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет единственный корень:

1)● $\sqrt[3]{x+\sqrt{x}} + 4\sqrt[6]{x+\sqrt{x}} + a = 0$;

2)* $2z + \sqrt[4]{z} - 3\sqrt{2z+\sqrt[4]{z}+1} + a + 1 = 0$.

119. Упростите выражение, считая, что переменные принимают только положительные значения:

1) $\sqrt[10]{\dfrac{a^4}{b^7}} : \sqrt[15]{\dfrac{a^6}{b^{10}}}$;

2) $\sqrt[4]{\dfrac{a^2b}{9}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{ab}}$;

3) $\dfrac{1}{a}\sqrt[3]{\dfrac{4a^2}{b}} \cdot \sqrt{\dfrac{ab}{2}}$;

4) $\sqrt[5]{\dfrac{4x^3}{a^2}} : \left(x\sqrt{\dfrac{2}{ax}}\right)$;

5) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}}$;

6) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}} : \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[4]{x}}$.

120. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt[10]{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3}-2}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что для арифметических корней верно равенство $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \geqslant 0$, $b > 0$.

2. Вычислите $\sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt[6]{96}$.

3. Сравните $\sqrt[3]{23}$ и $2\sqrt{2}$.

8. Степень с рациональным показателем

В случае, когда m делится на n, корень $\sqrt[n]{a^m}$ можно заменить степенью $a^{\frac{m}{n}}$:

$$\sqrt[3]{3^9} = 3^{\frac{9}{3}} = 3^3,\ \sqrt{5^8} = 5^{\frac{8}{2}} = 5^4,\ \sqrt[5]{2^{-10}} = 2^{\frac{-10}{5}} = 2^{-2} \text{ и т. п.}$$

Если же целое число m не делится на натуральное число n, то число $\dfrac{m}{n}$ является дробным.

Определим степень с *дробным показателем* с помощью равенства $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степень с рациональным показателем

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где m — целое,
а n — натуральное число, $n \neq 1$, $a > 0$.

Так, например,

$$3^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{3^7},\ 5^{-0,3} = 5^{\frac{-3}{10}} = \sqrt[10]{5^{-3}} \text{ и т. п.}$$

Можно показать, что для степеней с рациональными показателями остаются справедливыми свойства, ранее установленные для степеней с целыми показателями.

Свойства степеней с целыми показателями

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

Докажем, например, что $(a^x)^y = a^{xy}$, где x и y — рациональные числа. Пусть $x = \frac{m}{n}$ и $y = \frac{p}{q}$, тогда

$$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} =$$

$$= \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{xy},$$

что и требовалось доказать.

В рамках принятого определения степени с дробным показателем такие выражения, как $(-2)^{\frac{1}{3}}$, $0^{2,5}$, $(-3)^{\frac{6}{18}}$, не имеют смысла.

Поскольку $\sqrt[n]{0^m} = 0$ при любом натуральном m, естественно считать, что $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m}$, и *доопределить* степень с дробным показателем $0^r = 0$, где $r \in \boldsymbol{Q}$.

Степени с рациональными показателями часто встречаются в тождественных преобразованиях выражений.

Пример 1. Найти значение выражения

$$\frac{a+b}{a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} \text{ при } a = 1,5,\ b = 40,5.$$

Решение. Попытаемся упростить данное выражение. В знаменателе дроби каждый из членов содержит степень переменной a, поэтому естественно попытаться вынести общий множитель: $a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$. Поскольку $a^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$ и $b^{\frac{2}{3}} = \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2$, выражение $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ является неполным квадратом двучлена $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$. При этом выражение $a + b$, стоящее в числителе дроби, можно рассматривать как сумму кубов:

$$a + b = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right).$$

Теперь исходную дробь можно сократить:

$$\frac{a + b}{a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= 1 + \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Пора подставить данные значения переменных:

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + 27^{\frac{1}{3}} = 1 + 3 = 4.$$

Ответ: 4.

Примечание. В рассмотренном примере удалось устно найти степень числа. В тех случаях, когда это не удаётся, на помощь приходит калькулятор. Так, на инженерном калькуляторе (рис. 50), который является одной из стандартных подпрограмм популярного компьютерного пакета «Windows»

(*Пуск* → *Программы* → *Стандартные* → *Калькулятор* → → *Вид* → *Инженерный*),

для возведения в степень есть специальная клавиша. Чтобы найти, например, значение степени $3,7^{1,9}$, нужно:

1) ввести основание степени 3,7;
2) нажать клавишу **x^y**;
3) ввести показатель степени 1,9;
4) нажать клавишу «=» на калькуляторе (или «Enter» на клавиатуре).

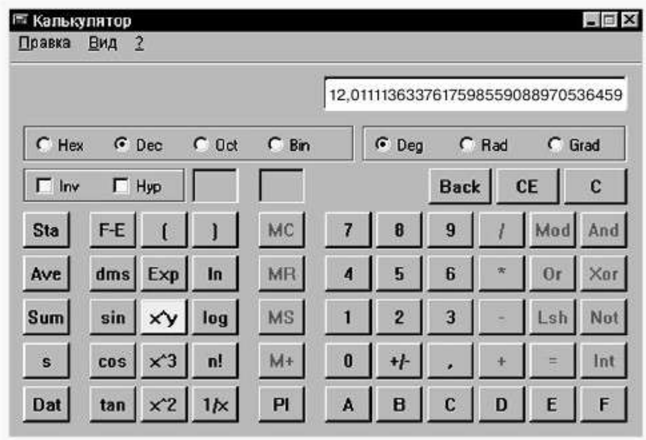


Рис. 50

На дисплее калькулятора (рис. 50) появится приближённое значение степени, вычисленное с высокой точностью:

$$12{,}0111136337617598559088970536459.$$

Пример 2. Доказать, что при $0 < a < 125$ верно равенство

$$\left(\left(a^{\frac{1}{3}} + 5\right)^2 - 20a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} = 5.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть данного равенства:

$$\left(\left(a^{\frac{1}{3}} + 5\right)^2 - 20a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} = \left(\left(a^{\frac{1}{3}} + 5\right)^2 - 4\cdot 5a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\left(a^{\frac{1}{3}} - 5\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}.$$

Поскольку $\left(a^{\frac{1}{3}} - 5\right)^2 = \left|a^{\frac{1}{3}} - 5\right|^2$ имеем $\left|a^{\frac{1}{3}} - 5\right| + a^{\frac{1}{3}}$.

При $0 < a < 125$ разность $a^{\frac{1}{3}} - 5$ отрицательна, значит, модуль этой разности — число ей противоположное:

$$\left|a^{\frac{1}{3}} - 5\right| + a^{\frac{1}{3}} = -\left(a^{\frac{1}{3}} - 5\right) + a^{\frac{1}{3}} = 5,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

121. Представьте в виде степени или произведения степеней с дробными показателями:

1) $\sqrt[3]{x}$; 4) $\sqrt[6]{b^5}$; 7) $\sqrt{-a^3}$; 10) $\sqrt[7]{\dfrac{a^5}{2b^4}}$;

2) $\sqrt[4]{y}$; 5) $\sqrt[7]{a^2b^3}$; 8) $\sqrt[6]{-y^5}$; 11) $\sqrt[7]{\dfrac{3c^8}{x^5}}$;

3) $\sqrt[5]{a^3}$; 6) $\sqrt[3]{bc^2}$; 9) $\sqrt[3]{(-d)^2}$; 12) $\sqrt{\dfrac{2d^4}{a^6}}$.

122. Представьте в виде корня или произведения корней:

1) $a^{\frac{2}{7}}$; 5) $c^{1\frac{2}{3}}$; 9) $2^{-\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$;

2) $b^{\frac{5}{9}}$; 6) $b^{-1\frac{1}{2}}$; 10) $3^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$;

3) $x^{-\frac{3}{4}}$; 7) $a^{0,6} \cdot b^{-0,7}$; 11) $(a+b)^{-\frac{1}{2}}$;

4) $a^{-0,5}$; 8) $x^{-0,8} \cdot y^{-0,9}$; 12) $(x+2y)^{\frac{2}{3}}$.

123. Представьте в виде степени:

1) $x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{6}}$; 4) $b^{\frac{7}{10}}b^{-\frac{1}{5}}b^{-\frac{4}{15}}$; 7) $\left(b^{\frac{5}{7}}\right)^{0,7} \cdot b$;

2) $y^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{7}}y^{-\frac{1}{14}}$; 5) $\left(a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^3$; 8) $(c^{-0,3})^{1\frac{2}{3}} \cdot c$;

3) $c^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{5}{9}} : c^{-\frac{3}{4}}$; 6) $\left(x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{6}}\right)^{-3}$; 9) $(d^{-0,5})^3 \cdot d$.

124. Вычислите:

1) $81^{\frac{3}{4}}$; 4) $0,0001^{-\frac{3}{4}}$; 7) $\dfrac{9^{3,5}}{27^{1\frac{2}{3}}}$;

2) $125^{-\frac{2}{3}}$; 5) $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $\dfrac{8^{-1\frac{1}{3}}}{16^{-1,25}}$;

3) $0,001^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(5\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$; 9) $\dfrac{12^{\frac{5}{6}}}{2^{1\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}$.

125. Представьте в виде степени с основанием:

1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) 4; 4) 0,125; 5) $\sqrt[3]{4}$

числа:

а) 0,25; б) $\frac{1}{32}$; в) $\sqrt[5]{16}$; г) $\frac{1}{\sqrt[10]{512}}$; д) $8\sqrt{2}$.

126. Представьте в виде степени с основанием:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\sqrt[3]{9}$; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\sqrt[5]{81}$

числа:

а) $\frac{1}{81}$; б) 81; в) $\sqrt[5]{9}$; г) $\frac{1}{\sqrt[7]{243}}$; д) $27\sqrt{3}$.

127. Представьте выражение в виде квадрата:

1) a; 3) $x^{\frac{2}{3}}$; 5) $4c$; 7) $64xy^{\frac{1}{2}}$;

2) y^3; 4) $b^{-\frac{2}{5}}$; 6) $25a$; 8) $9b^{\frac{1}{3}}c$.

128. Представьте выражение в виде куба:

1) p; 3) $a^{\frac{3}{4}}$; 5) $8z$; 7) $125ay^{\frac{1}{3}}$;

2) a^2; 4) $b^{-\frac{3}{7}}$; 6) $27x$; 8) $1000b^{\frac{1}{2}}c$.

129. Раскройте скобки:

1) $\left(2a^{\frac{3}{4}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 5) $\left(c^{\frac{1}{2}}+c^{-\frac{1}{3}}\right)\left(c^{\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{2}}\right)$;

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)$; 6) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$;

3) $\left(b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(b^{\frac{1}{6}}-1\right)$; 7) $\left(x^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{3}}\right)\left(z^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}\right)$;

4) $\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)$; 8) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

130. Представьте выражение в виде разности квадратов и разложите на множители:

1) $10-a$; 4) x^4-y^3; 7) $3x-y^{\frac{1}{4}}$;

2) $b-7$; 5) $a^{\frac{1}{2}}-9$; 8) $p^{\frac{1}{5}}-9q$;

3) a^3-25; 6) $25-b^{\frac{1}{3}}$; 9) $x^{1,4}-28y$.

131. Представьте выражение в виде суммы или разности кубов и разложите на множители:

1) $8 - a$;
2) $b + 27$;
3) $1000x - 3$;
4) $125 + 2y$;
5) $a^{\frac{1}{2}} + 8$;
6) $64 - b^{\frac{1}{3}}$;
7) $x^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{4}}$;
8) $b^{\frac{1}{6}} + 8c^{\frac{1}{2}}$.

132. Сократите дробь на a:

1) $\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{a}{a - a^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{a}{a^{\frac{4}{3}} + a}$; 4) $\dfrac{a - a^{\frac{1}{2}}}{a - a^{\frac{1}{6}}}$.

133. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$;
2) $\dfrac{x + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{y + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$;
3) $\dfrac{a - 25}{a^{\frac{1}{2}} - 5}$;
4) $\dfrac{2y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x - 4y}$.

134. 1) Вычислите значение выражения, если нужно, упростив его:

а) $\dfrac{7a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{14}{5}} - 3a^{-\frac{1}{5}}}$ при $a = 2$;

б) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{4}{3}}}$ при $a = 4$;

в) $\dfrac{a}{a^{\frac{1}{3}} - 2} - \dfrac{2a + 16}{a^{\frac{1}{3}} + 2}$ при $a = 27$;

г) $\dfrac{y^2 - 8y^{\frac{1}{2}}}{y - 4} + \dfrac{8}{y^{\frac{1}{2}} + 2}$ при $y = 25$.

2) Проведите вычисления с помощью калькулятора без предварительного упрощения выражений.

135. Замените корни степенями и упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{c}+1}-\dfrac{3\sqrt[3]{c}-1}{c+1}\right)\cdot\dfrac{c+1}{\sqrt[3]{c^2}-1}$;

2) $\dfrac{y-1}{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{y}}\cdot\left(\dfrac{y}{y-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}-1}\right)$;

3) $\sqrt[4]{b}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{b}+\sqrt[4]{bx}}-\sqrt[4]{b}\right)-\dfrac{b-x}{\sqrt{b}-\sqrt{x}}$;

4) $\left(\dfrac{49}{x-27}-\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-27\sqrt[3]{x}}{16-\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{40-\sqrt[3]{x^2}}{4-\sqrt[3]{x}}$.

136. Решите уравнение:

1) $(x+9)^{\frac{1}{6}}-(x+3)^{\frac{1}{2}}=0$;

2) $\dfrac{y}{y+1}-2\left(\dfrac{y+1}{y}\right)^{0,5}=3$.

137. Найдите все значения a, при которых не имеет корней уравнение:

1) $x-2ax^{0,5}-a+2=0$;

2) $x+3(2+x)^{0,5}+a=0$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Представьте в виде степени числа b:

1) $b^2\cdot b^5$;

2) $\dfrac{b^7}{b^4}$;

3) $(b^3)^6$;

4) $\left(\dfrac{b^{12}}{b^3}\right)^2$.

2. Запишите без знаков корней выражение и упростите его

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt{a}}.$$

3. Сократите дробь $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-8}{x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+4}$.

Глава 3

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

В этой главе снимется последнее ограничение на показатель степени — вы сможете использовать степени, показателями которых являются любые действительные числа. В пункте 9 вас ожидает также знакомство с новой функцией, аргументом которой является показатель степени числа, — показательной функцией. Свойства показательной функции будут использоваться в решении уравнений и неравенств. Проблема решения показательного уравнения $a^x = b$ в пункте 10 приведёт к понятию логарифма, а в последнем пункте главы вы научитесь применять свойства логарифмов к решению различных задач.

9. Функция $y = a^x$

В предыдущей главе вы познакомились с понятием степени с рациональным показателем. Это позволяет рассматривать функции вида $y = a^x$, аргумент которых может принимать любые рациональные значения.

Основанием степени с рациональным показателем может быть только положительное число, но следует ввести ещё одно ограничение. Поскольку $1^x = 1$, функция $y = 1^x$ является не показательной, а линейной. Таким образом, основанием a функции $y = a^x$ может быть любое положительное число, отличное от 1.

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют **показательной.**

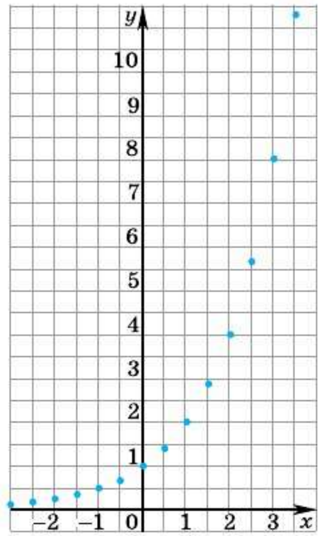
Построим график функции $y = a^x$, например при $a = 2$. Для этого, как обычно, найдём сначала координаты некоторых точек графика и заполним таблицу значений функции:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \approx 0{,}13;\ \ 2^{-2{,}5} = 2^{-3+0{,}5} = 2^{-3} \cdot 2^{0{,}5} \approx \frac{1}{8} \cdot 1{,}414 \approx 0{,}18;$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ \ldots;\ \ 2^{3{,}5} = 2^3 \cdot 2^{0{,}5} \approx 8 \cdot 1{,}414 \approx 11{,}31.$$

x	$y = 2^x$
−3	0,13
−2,5	0,18
−2	0,25
−1,5	0,35
−1	0,5
−0,5	0,71
0	1

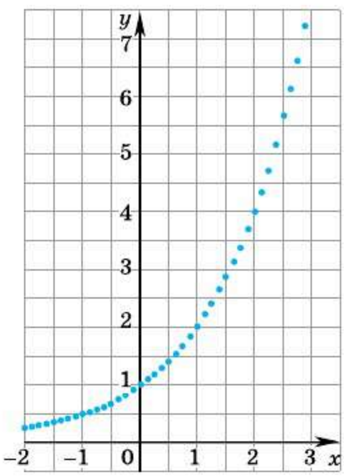
x	$y = 2^x$
0,5	1,41
1	2
1,5	2,83
2	4
2,5	5,66
3	8
3,5	11,31



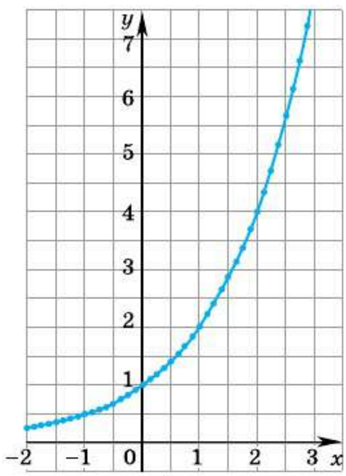
а)

Отметим эти точки на координатной плоскости (рис. 51, *а*).

При составлении таблицы вычислялись значения функции $y = 2^x$ для значений x, взятых с шагом 0,5. На рисунке 51, *б* и *в* изображены точки графика функции $y = 2^x$ для значений x, взятых соответственно с шагом 0,25 и 0,1.



б)



в)

Рис. 51

Можно заметить, что с уменьшением шага точки всё гуще располагаются на некоторой непрерывной кривой линии (рис. 52). Все точки этой линии, абсциссы которых рациональны, являются точками графика функции $y = 2^x$.

Но кроме них на графике имеется также бесконечное множество «лишних» точек, абсциссы которых иррациональны. Условимся считать, что и при любом иррациональном значении x ордината соответствующей точки нашей кривой равна 2^x.

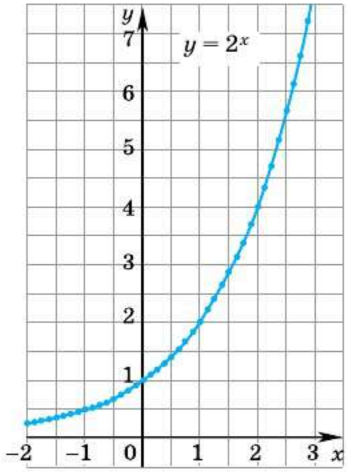


Рис. 52

Тогда полученная кривая будет являться графиком показательной функции $y = 2^x$, аргумент которой может принимать любые действительные (рациональные и иррациональные) значения.

Аналогичным образом условимся считать, *что при любом положительном a, отличном от 1, аргумент показательной функции $y = a^x$ может принимать любые действительные значения.*

Степени с действительными показателями обладают такими же свойствами, как и степени с рациональными показателями.

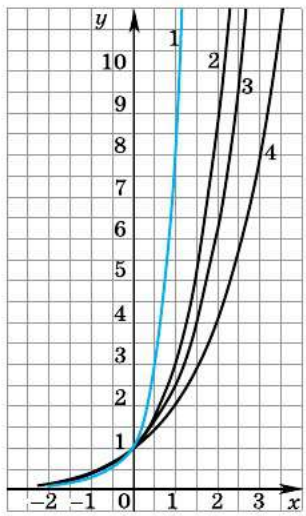


Рис. 53

На рисунке 53 в одной системе координат изображены графики нескольких показательных функций с основаниями, бо́льшими 1. Рассматривая эти графики, можно отметить несколько свойств, общих для всех функций вида $y = a^x$ при $a > 1$.

Свойства степени с действительными показателями

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

Свойства функции $y = a^x$, $a > 1$

1. Функция определена и непрерывна на множестве всех действительных чисел.

2. Область значений функции — множество всех положительных чисел.

3. Функция является возрастающей.

4. При $x = 0$ значение функции равно 1, т. е. график проходит через точку (0; 1).

5. Ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика функции $y = a^x$.

Из этих свойств следует, что при $x > 0$ значения функции больше 1, а при $x < 0$ значения функции заключены между 0 и 1.

Для построения графика функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ можно снова составить таблицу значений, но лучше поступить иначе. Пусть, например, нужно построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Поскольку $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ получается из графика функции $y = 2^x$ с помощью симметрии относительно оси ординат (рис. 54).

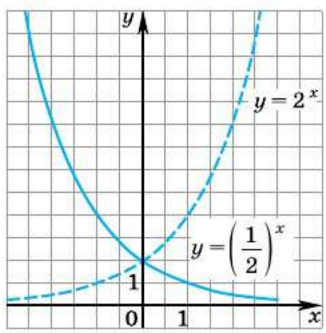


Рис. 54

Различия в свойствах функций $y = a^x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$ относятся только к свойству 3 — характеру монотонности: при $a > 1$ показательная функция возрастает, при $0 < a < 1$ убывает.

Свойство монотонности часто применяется при решении показательных уравнений и неравенств.

Пример 1. Решить уравнение $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$.

Р е ш е н и е. Введём вспомогательную переменную t: $t = 3^x$, тогда $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = t^2$. Поскольку переменная t может принимать только положительные значения, задача сводится к нахождению положительного корня уравнения

$t^2 - 8t - 9 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = -1$, $t_2 = 9$, значит, искомый корень 9.

Возвращаясь к переменной x, получим $3^x = 9$, $3^x = 3^2$. В силу монотонности своё значение 3^2 функция $y = 3^x$ принимает единственный раз при $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{3y+2}, \\ 4x^2 - 2x = y + 13. \end{cases}$$

Решение. Перепишем первое уравнение заданной системы $9^{x+1} = 3^{3y+2}$ как равенство степеней с одинаковыми основаниями: $3^{2x+2} = 3^{3y+2}$. Поскольку каждое своё значение показательная функция принимает по одному разу, из равенства значений показательной функции следует равенство значений её аргумента: $2x + 2 = 3y + 2$, $2x = 3y$.

Подставляя $3y$ вместо $2x$ во второе уравнение системы, получим:

$$(3y)^2 - 3y = y + 13,\ \ 9y^2 - 4y - 13 = 0,\ \ y_1 = -1,\ \ y_2 = \frac{13}{9}.$$

Найдём соответствующие значения x из равенства $2x = 3y$:

$$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = \frac{13}{6}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $y_1 = -1$; $x_2 = \frac{13}{6}$, $y_2 = \frac{13}{9}$.

Пример 3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2}.$$

Решение. Значение выражения, стоящего под знаком корня чётной степени, должно быть неотрицательным:

$$0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2 \geqslant 0.$$

Введём вспомогательную переменную t: $t = 0{,}5^x$ и найдём положительные решения неравенства $0{,}25^{-1} \cdot t^2 - 9t + 2 \geqslant 0$:

$$\begin{cases} 4t^2 - 9t + 2 \geqslant 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} t \leqslant \frac{1}{4} \text{ или } t \geqslant 2, \\ t > 0, \end{cases}$$

$$0 < t \leqslant \frac{1}{4} \text{ или } t \geqslant 2 \text{ (рис. 55).}$$

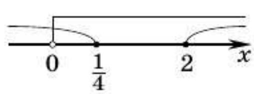


Рис. 55

Вернёмся к переменной x. $0 < 0{,}5^x \leqslant \frac{1}{4}$ или $0{,}5^x \geqslant 2$. Поскольку $0 < 0{,}5^x$ при всех значениях x, имеем:

$$0{,}5^x \leqslant 0{,}5^2 \text{ или } 0{,}5^x \geqslant 0{,}5^{-1}.$$

Показательная функция с основанием 0,5 является убывающей, поэтому большему её значению соответствует меньшее значение аргумента, значит: $x \geqslant 2$ или $x \leqslant -1$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Примечание. При переходе от неравенств со степенями к неравенствам с их показателями, в силу убывания показательной функции с основанием, меньшим 1, изменили знаки неравенств. Понятно, что если бы функция была возрастающей, знак неравенства следовало бы сохранить, например: $3^x < 3^2$, $x < 2$.

С показательной функцией, определённой на множестве натуральных чисел, вы встречались в курсе алгебры 9 класса в теме «Прогрессии». Действительно, формула n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1q^{n-1}$ при $b_1 = q$ задаёт показательную функцию, определённую на множестве натуральных чисел

$$b_n = b(n) = q^n.$$

Показательная функция $y = a^x$ обладает важным свойством: при увеличении аргумента на 1 она изменяет своё значение в a раз: $a^{x+1} = a \cdot a^x$.

Такие зависимости довольно широко распространены в окружающем нас мире. Рассмотрим три примера из биологии, физики и экономики, приводящих к показательной функции.

Биология. В питательной среде бактерия кишечной палочки делится каждые 20 мин. Понятно, что общее число бактерий за каждый час увеличивается в 8 раз. Если в начале процесса была одна бактерия, то через x ч число N станет равным 8^x:

$$N(x) = 8^x.$$

Физика. Время, за которое распадается половина массы радиоактивного вещества, называют его периодом полураспада. У цезия-137, являющегося основным компонентом радиоактивного заражения местности после Чернобыльской катастрофы, период полураспада 30 лет. Значит, от начальной массы m_0 цезия через x лет останется $m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$:

$$m(x) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}.$$

Экономика. Если ежемесячно на банковский вклад, равный s_0 р., начисляется $p\%$, то через x месяцев вклад s станет равным $s_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$, т. е.:

$$s(x) = s_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x.$$

Найдём, например, на сколько процентов возрастёт банковский вклад за год, если ежемесячно банк начисляет на него 2%.

1. Сначала найдём, каким станет вклад через 12 месяцев:

$$s(12) = s_0 \cdot (1 + 0{,}02)^{12} = s_0 \cdot 1{,}02^{12} \approx 1{,}27s_0.$$

2. Выясним, на сколько вырос вклад за год:

$$s(12) - s_0 = 1{,}27s_0 - s_0 = 0{,}27s_0.$$

3. Определим, сколько процентов от начального вклада составляет этот прирост:

$$\frac{s(12) - s_0}{s_0} \cdot 100\% = \frac{0{,}27s_0}{s_0} \cdot 100\% = 27\%.$$

Упражнения

138. С помощью графика функции $y = 2^x$ (см. рис. 52, *в*) найдите:

1) приближённое значение функции, если:

а) $x = 0{,}8$; г) $x = -0{,}4$; ж) $x = \sqrt{2}$;

б) $x = 1{,}7$; д) $x = -0{,}6$; з) $x = \sqrt{3}$;

в) $x = 2{,}4$; е) $x = -1$; и) $x = -\sqrt{2}$;

2) приближённое значение аргумента, если:

а) $y = 0{,}6$; в) $y = 2$; д) $y = 6$;

б) $y = 1{,}5$; г) $y = 3{,}5$; е) $y = 4{,}5$.

139. Принадлежат ли графику функции $y = 2^x$ точки:

1) $A(5; 32)$; 3) $C(4{,}5; 16\sqrt{2})$;

2) $B(-3; 0{,}125)$; 4) $D\left(-1{,}5; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$?

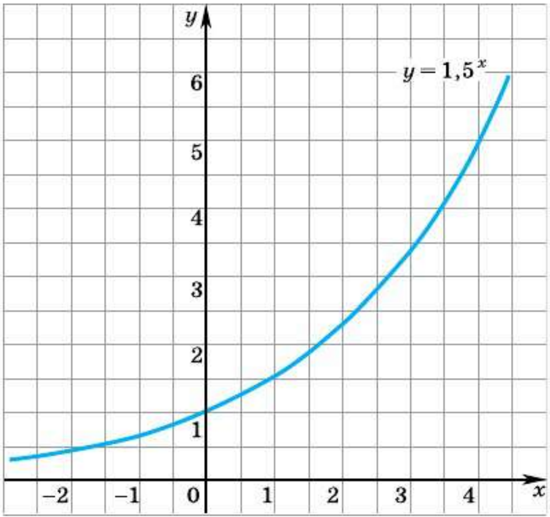


Рис. 56

140. Используя график функции $y = 1{,}5^x$ (рис. 56), найдите приближённые решения уравнения и неравенства:

1) $1{,}5^x = 3$;
2) $1{,}5^x < 7$;
3) $1{,}5^x = 5$;
4) $1{,}5^x < 3$;
5) $1{,}5^x = 0{,}3$;
6) $1{,}5^x > 0{,}5$;
7) $1{,}5^x = 0{,}8$;
8) $1{,}5^x > 2$;
9) $\frac{1}{2} \leqslant 1{,}5^x \leqslant 4$;
10) $2 \leqslant 1{,}5^x < 7$;
11) $3 < 1{,}5^x \leqslant 4$;
12) $1 \leqslant 1{,}5^x \leqslant 6$.

141. Какая показательная функция является возрастающей, а какая — убывающей:

1) $y = 3^x$;
2) $y = (\sqrt{3})^x$;
3) $y = \left(\frac{6}{7}\right)^x$;
4) $y = (\sqrt{2})^x$;
5) $y = (\sqrt{2} - 1)^x$;
6) $y = (2 - \sqrt{3})^{-x}$?

142. Сравните значения выражений:

1) 2^{-7} и $2^{-5,3}$;
2) $4^{-1,4}$ и $4^{0,03}$;
3) 5^0 и $5^{-0,1}$;
4) $0{,}3^0$ и $0{,}3^{0,1}$;
5) $1{,}1^{\sqrt{3}}$ и $1{,}1^{1,7}$;
6) $2^{-\sqrt{5}}$ и $2^{-2,5}$;
7) $0{,}2^{\sqrt[3]{3}}$ и $0{,}2^{\sqrt{2}}$;
8) $17^{\sqrt[5]{4}}$ и $17^{\sqrt{2}}$;
9) $7^{\sqrt{2}}$ и $7^{\sqrt[3]{2}}$.

143. Решите уравнение, представляя его правую часть в виде степени с тем же основанием, что и степень в левой части:

1) $7^x = 1$;
2) $2^x = 16$;
3) $5^x = 625$;
4) $5^{x-2} = 125$;
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$;
6) $2^x = \frac{4}{\sqrt[5]{16}}$;
7) $6^{4x-10} = \frac{1}{36}$;
8) $0{,}2^x = \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$;
9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{8}$.

144. Определите a, если известно, что график функции $y = a^x$ проходит через точку: 1) $M(0{,}5; 3)$; 2) $K(2; 5)$.

145. Решите уравнение:

1) $2^x = 3 - x$;
2) $3^x + x = 11$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 1$;
4) $5^x = 6 - x$.

146. График функции $y = a^x$ проходит через точку $A(4; 25)$. Проходит ли этот график через точку:
1) $B(-6; 0{,}008)$;
2) $C(6; 125)$?

147. На рисунке 53 изображены графики функций вида $y = a^x$. Определите a для каждой из них.

148. Упростите выражение:

1) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{3}} - b^{\sqrt{5}})^2} - 1$;
2) $\frac{a^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} - a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} b^{\frac{\sqrt{5}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{5}}}$.

149. Выясните, является ли функция:
1) $y = 2^x + 2^{-x}$;
2) $y = 2^x - 2^{-x}$
чётной, нечётной, или она не является ни чётной, ни нечётной.

150. Докажите, что при любом значении x верно неравенство $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$.

151. Решите уравнение:

1) $\left(\frac{1}{64}\right)^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$;
2) $8^x = 128\sqrt{2}$;
3) $(2{,}5)^{2x-3} = 15\frac{5}{8}$;
4) $0{,}125 \cdot 4^{2x+3} = \frac{0{,}25}{\sqrt{2}}$;
5) $9^{2\sqrt{x}} = 3^{2x-6}$;
6) $10^{x - \sqrt{x^2+5x+1}} = 1000$;
7) $5^{x - \sqrt{3x-5}} = 125$;
8) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0$.

152. Решите уравнение:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^{x} = 5$;
2) $3^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} = 36$;
3) $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} + 4 \cdot 5^{x-1} = 29$;
4) $5 \cdot 2^{x} - 7 \cdot 2^{x-1} + 9 \cdot 2^{x-2} = 60$;
5) ○ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 6$;
6) ○ $0{,}2^{x-3} - 3 \cdot 0{,}2^{x-2} - 6 \cdot 0{,}2^{x-1} = 500$;
7) ● $9^{x} - 2^{x+0{,}5} = 2^{x+3{,}5} - 3^{2x-1}$;
8) ● $4^{x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

153. Решите уравнение:

1) $4^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$;
2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} - 8\left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 9 = 0$;
3) $3 \cdot 2^{x} - 7 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 20 = 0$;
4) ○ $2^{x} - 13 \cdot 2^{\frac{x-2}{2}} - 12 = 0$;
5) ○ $5 \cdot 5^{x} - 3 \cdot 5^{-x} = 2$;
6) ○ $5^{x+1} + 5^{1-x} = 26$.

154. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 27^{x-2y} = \dfrac{1}{3^{2x+y}}, \\ 3x - 5y = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{5^{x-y}}}, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases}$

3) ● $\begin{cases} 3^{x} - 2^{2y} = 17, \\ 3^{\frac{x}{2}} + 2^{y} = 17; \end{cases}$

4) * $\begin{cases} u - (\sqrt{5})^{v} = v - (\sqrt{5})^{u}, \\ u + v^{2} = 12. \end{cases}$

155. Решите графически неравенство:

1) $2^{x} > 4 - 2x$;
2) $\sqrt{x} > 3^{x}$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < \sqrt{x}$;
4) $2^{x} < 2 - x^{2}$.

156. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > 16$;
2) $\sqrt{3^{x}} < 27$;
3) ○ $(3 - \sqrt{3})^{x} > 1$;
4) ○ $(\sqrt{15} - 3)^{x} \leqslant 1$;
5) ○ $\dfrac{2^{x} - 0{,}5}{3 + x} > 0$;
6) ○ $\dfrac{3^{x} - 81}{5 + 4x - x^{2}} \geqslant 0$;
7) ● $2^{x} \leqslant 5 - \dfrac{x}{2}$;
8) ● $3^{x} \geqslant \dfrac{3}{x}$;
9) * $3^{x} + 5^{x} > 8^{x}$;
10) * $3^{x} + 4^{x} < 5^{x}$.

157. Найдите область определения функции:

1) $\sqrt{9^x - 28 \cdot 3^x + 27}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}5^x - \dfrac{4}{0{,}5^x} - 3}}$.

158. Процент инфляции показывает, на сколько процентов (в среднем) выросли цены.

1) Выразите процент инфляции за x месяцев, если ежемесячная инфляция составляла 3%.

2) Вычислите с помощью калькулятора годовой процент инфляции.

159. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^x - a \cdot 2^x + a - 1 = 0:$$

1) имеет два корня; 2) не имеет корней;
3) имеет единственный корень.

Контрольные вопросы и задания

1. Любое ли положительное число можно представить в виде степени с основанием 2 и рациональным показателем?

2. Между какими последовательными натуральными числами заключено число $2^{\sqrt{2}}$?

3. Сравните значения выражений 3^{π} и $3^{\frac{10}{3}}$.

4. Решите неравенство $0{,}25^x - 4 \cdot 0{,}5^x < 0$.

10. Понятие логарифма

При решении показательных уравнений в предыдущем пункте удавалось представить обе части уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями и рациональными показателями. Так, например, при решении уравнения $2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{5}}$ заменяем $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{5}}$ степенью $2^{-\frac{6}{5}}$ и из равенства степеней с одинаковыми основаниями $2^x = 2^{-\frac{6}{5}}$ делаем вывод о равенстве показателей: $x = -\frac{6}{5}$. Однако, чтобы решить, казалось бы, более простое уравнение $2^x = 3$, имеющихся у вас знаний оказывается недостаточно. Дело в том, что число 3 нельзя представить в виде степени с основанием 2 и рациональным показателем.

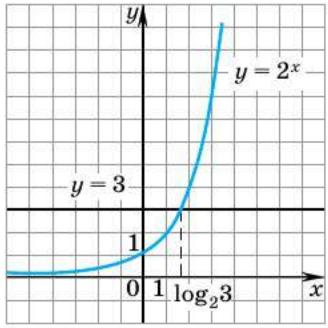


Рис. 57

▼ Действительно, если бы равенство $2^{\frac{m}{n}} = 3$, где m и n — натуральные числа, было верным, то при возведении его в степень n получилось бы верное равенство $2^m = 3^n$. Но последнее равенство неверно, так как левая его часть является чётным числом, а правая — нечётным. Значит, не может быть верным и равенство $2^{\frac{m}{n}} = 3$. △

С другой стороны, график непрерывной функции $y = 2^x$ пересекается с прямой $y = 3$ (рис. 57), и, значит, уравнение $2^x = 3$ имеет корень.

Таким образом, перед нами стоят два вопроса: «Как записать этот корень?» и «Как его вычислить?». Ко второму вопросу вернёмся в следующем пункте, а ответ на первый вопрос сформулируем в виде определения.

Показатель степени, в которую нужно возвести число a ($a > 0$, $a \neq 1$), чтобы получить число b, называется **логарифмом b по основанию a** и обозначается $\log_a b$.

Теперь можно записать корень уравнения $2^x = 3$:

$$x = \log_2 3.$$

Равенства $a^x = b$ и $x = \log_a b$, в которых число a положительно и не равно единице, число b положительно, а число x может быть любым, выражают одно и то же соотношение между числами a, b и x. Подставив в первое равенство выражение x из второго, получим основное логарифмическое тождество.

Основное логарифмическое тождество

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

Выразим x из равенства $y = \log_a x$, получим $x = a^y$. Последнее равенство задаёт функцию $x = a^y$, график которой симметричен графику показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 58, *а*, *б*).

Показательная функция $x = a^y$ является монотонной, и, значит, разные значения y соответствуют разным значениям x, но это говорит о том, что $y = \log_a x$, в свою очередь, является функцией x.

Показательная функция $y = a^x$ и *логарифмическая функция* $y = \log_a x$ являются взаимно обратными. Сравнивая их графики, можно отметить некоторые основные свойства логарифмической функции.

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

1. Функция $y = \log_a x$ непрерывна и определена на множестве положительных чисел.

2. Область значений функции $y = \log_a x$ — множество действительных чисел.

3. При $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ является убывающей; при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является возрастающей.

4. График функции $y = \log_a x$ проходит через точку $(1; 0)$.

5. Ось ординат — вертикальная асимптота графика функции $y = \log_a x$.

Рассмотрим несколько примеров, в которых используются свойства логарифмической функции.

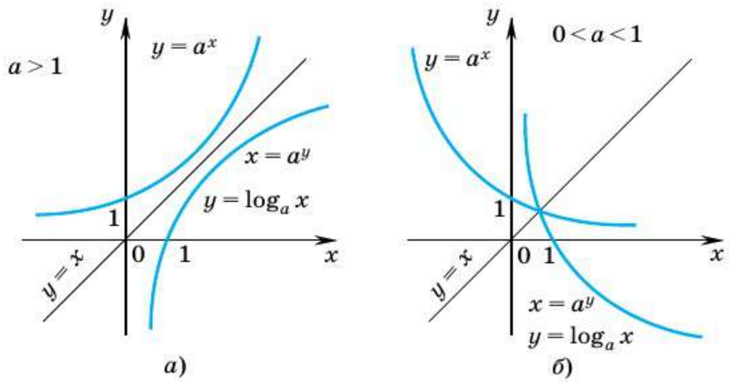


Рис. 58

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 (2^x - 7) = 3 - x$.

Решение 1. По определению логарифма имеем:

$$2^{3-x} = 2^x - 7.$$

Далее: $2^x - \dfrac{8}{2^x} - 7 = 0$. Поскольку $2^x \neq 0$, получаем:

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 = 0.$$

Будем рассматривать полученное уравнение как квадратное относительно 2^x и найдём его положительный корень, поскольку $2^x > 0$, то $2^x = 8$. Далее имеем: $2^x = 2^3$, $x = 3$.

Решение 2. Левая часть уравнения задаёт возрастающую функцию $y = \log_2 (2^x - 7)$. Действительно, при увеличении значения x соответственно увеличиваются значения 2^x, $2^x - 7$ и $\log_2 (2^x - 7)$. Правая же часть уравнения задаёт убывающую функцию $y = 3 - x$. Значит, данное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень. Нетрудно подобрать корень данного уравнения — число 3.

Ответ: 3.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{x+2} (5 - x) > 1$.

Решение. Найдём множество значений переменной x, при которых все входящие в данное неравенство выражения имеют смысл — *область допустимых значений переменной* неравенства (обычно используется сокращение ОДЗ). Одновременно должны выполняться следующие условия: основание логарифма и выражение, стоящее под знаком логарифма, положительны, а основание логарифма, кроме того, отличается от 1. Следовательно, ОДЗ состоит из решений системы

$$\begin{cases} 5 - x > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } (-2; -1) \cup (-1; 5).$$

Для любого значения x из ОДЗ правую часть данного неравенства можно представить в виде логарифма с основанием $x + 2$:

$$\log_{x+2} (5 - x) > \log_{x+2} (x + 2).$$

Основание $x + 2$ логарифмов может быть как больше, так и меньше 1. В первом случае большему логарифму соответствует большее значение стоящего под его знаком выражения, а во втором — меньшее. Следовательно, чтобы перейти от неравенства логарифмов к неравенству выражений, стоящих под их знаками, нужно рассмотреть два случая:

1) основание логарифма больше 1 (знак неравенства не изменяется);

2) основание логарифма меньше 1 (знак неравенства меняется на противоположный).

Случай 1. $\begin{cases} x+2>1, \\ 5-x>x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1, \\ 2x<3; \end{cases}$ $-1<x<1{,}5.$

Найденные значения x входят в ОДЗ и, соответственно, в множество решений неравенства.

Случай 2. $\begin{cases} x+2<1, \\ 5-x<x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ 2x>3; \end{cases}$ нет решений.

Ответ: $-1<x<1{,}5$.

Упражнения

160. Пользуясь определением логарифма, найдите:

1) а) $\log_2 4$; б) $\log_3 81$; в) $\log_{0,5} 0{,}125$; г) $\log_3 \frac{1}{27}$; д) $\log_{0,5} 8$; е) $\log_9 81$; ж) $\log_4 \sqrt{2}$; з) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$; и) $\log_{\sqrt{2}} 2$.

2) а) $\log_5 25$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; в) $\log_4 64$; г) $\log_{0,25} 16$; д) $\log_3 \frac{1}{81}$; е) $\log_5 0{,}04$; ж) $\log_{27} \sqrt{3}$; з) $\log_{\sqrt[3]{2}} 0{,}125$; и) $\log_{\sqrt{3}} 81$.

161. Запишите в виде логарифма с основанием:

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 4; 5) $\frac{1}{27}$

числа:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) -1; е) -2; ж) -3; з) 0,5; и) $\frac{1}{3}$; к) $-0{,}5$.

162. Решите уравнение:

1) $\log_x 32 = 5$;

2) $\log_x 27 = -3$;

3) $\log_x \sqrt{5} = 3$;

4) $\log_x \sqrt[3]{49} = -2$.

163. Решите уравнение:

1) $\log_2 x = 0$;
2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$;
3) $\log_2 (x + 3) = 2$;
4) $\log_{0,6} (x - 5) = -2$;
5) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 3x - 7) = 2$;
6) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x^2 + 5x + 2) = -6$.

164. Решите уравнение, пользуясь определением логарифма:

1) $2^x = 5$;
2) $0,5^x = 7$;
3) $5^{x+1} = 2$;
4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 3$.

165. Решите неравенство:

1) $\log_2 x > 0$;
2) $\log_3 x < 1$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 3$;
4) $\sqrt{3^x} < 16$.

166. В одной системе координат постройте графики функций:

1) $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$.

Используя графики, сравните числа:

а) $\log_2 5$ и $\log_3 5$;
б) $\log_2 0,9$ и $\log_3 0,9$;
в) $\log_2 (5 - \sqrt{17})$ и $\log_3 (5 - \sqrt{17})$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Используя графики, сравните числа:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
б) $\log_{\frac{1}{2}} 0,8$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0,8$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{17} - 4)$ и $\log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{17} - 4)$.

167. 1) В одной системе координат изобразите схематически графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$:

а) при $a > b > 1$;
б) при $0 < b < a < 1$.

2) В этой же системе постройте графики обратных им функций $y = \log_a x$ и $y = \log_b x$.

3) Используя графики, решите неравенство

$$\log_a x < \log_b x.$$

168. Найдите область определения выражения:

1) $\log_2 (x + 3)$;
2) $\log_3 (2 - x)$;
3) $\log_4 (x + 1)(x - 2)$;
4) $\log_x (2x + 3)$;
5) $\log_5 (7x^2 + 10x + 3)$;
6) $\log_5 (7 + 10x - 17x^2)$;
7) $\log_{3-2x} (2x + 3)$;
8) $\log_{3-2x} (7 - 3x)$.

169. Решите уравнение:

1) $25^x - 8 \cdot 5^x + 15 = 0$;
2) $2^x + 10 \cdot 2^{-x} - 7 = 0$;
3) $4^x - 6^{x+1} + 5 \cdot 9^x = 0$;
4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$;
5) $2 \cdot (0{,}1)^x + 10^{x+1} - 21 = 0$;
6) $49^x - 4 \cdot 35^x + 25^x = 0$;
7) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 15$;
8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} - 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} - 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = 10$.

170. Решите уравнение:

1) $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$;
2) $\log_4 (4^{-x} + 3) = x + 1$.

171. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_2 (4^x - a) - x = 0$ имеет:

1) единственный корень;
2) два корня.

172. Решите неравенство:

1) $\log_5 (x + 2) > 2$;
2) $\log_{0,5} (x - 2) < -2$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x + 2) < 4$;
4) $\log_{\sqrt[3]{0,1}} (1 - x) > 6$;
5) $\log_{\sqrt[3]{16}} (x^2 - 3x + 4) < 1{,}5$;
6) $\log_{\sqrt{2}} (x^2 - 5x - 6) > 6$.

173. Выполнив эскизы графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, решите:

1) уравнение $f(x) = g(x)$; 2) неравенство $f(x) < g(x)$, где:

а) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 5 - x^2$;
б) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = \sqrt{x - 2} - 2$.

174. Решите неравенство, используя метод интервалов:

1) $\frac{\log_5 x - 2}{2 - \log_6 x} > 0;$

2) $\frac{\log_{0,5} x + 2}{2 - \log_3 x} < 0;$

3) $\frac{\log_{0,4} x - 2}{3x^2 - 10x + 7} > 0;$

4) $\frac{7x^2 - 10x + 3}{\log_{0,9} x - 2} \leqslant 0;$

5) $\frac{x^2 - 9x - 10}{\log_{0,9}(x^2 - 9)} \geqslant 0;$

6) $\frac{\log_5(9 - x^2)}{x^2 - 3x - 4} < 0.$

175. Решите неравенство:

1) $\log_{x-3}(7 - x) > 0;$ 2) $\log_{7-x}(x - 3) > 0.$

! Контрольные вопросы и задания

1. Запишите соотношение $a^c = b$ между числами a, b и c с помощью логарифма с основанием a.

2. Почему число 1 нельзя рассматривать в качестве основания логарифма?

3. В чём отличие свойств логарифмических функций с основаниями, большими 1 и меньшими 1?

4. Решите:

1) уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) = -1;$

2) неравенство $\frac{\log_3 x - 2}{5x - 1} \leqslant 0.$

5. Какие два случая надо рассмотреть при решении неравенства $\log_x(7 - x) > 0$? Решите это неравенство.

11. Свойства логарифмов

В предыдущем пункте вы научились переходить от показательной формы записи соотношения $a^x = b$ между числами a, b и x к логарифмической $x = \log_a b$ и обратно. Связь этих двух форм записи соотношения между числами a, b и x позволяет получить свойства логарифмов из известных свойств степеней.

Рассмотрим, например, произведение степеней с одинаковым основанием: $a^x a^y$. Пусть $a^x = b$ и $a^y = c$. Перейдём к логарифмической форме: $x = \log_a b$ и $y = \log_a c$, тогда $bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$. От показательной формы равенства $bc = a^{\log_a b + \log_a c}$ перейдём к логарифмической форме:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Заметим, что в левой части формулы числа a и b могут быть отрицательными, поэтому формула должна выглядеть так:

$$\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|.$$

Аналогично можно получить ещё два свойства для логарифмов степени и частного.

Свойства логарифмов

Логарифм произведения $\boldsymbol{\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|}$,

логарифм частного $\boldsymbol{\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|}$,

логарифм степени $\boldsymbol{\log_a b^p = p \log_a |b|}$.

Последнее свойство позволяет вывести важную формулу, с помощью которой можно выразить логарифм с одним основанием через логарифм с другим основанием.

Пусть $\log_a b = x$. Перейдём к показательной форме $a^x = b$. *Прологарифмируем это равенство по основанию* c, т. е. найдём логарифмы с основанием c обеих частей этого равенства: $\log_c a^x = \log_c b$. Применяя к левой части свойство логарифма степени, получим $x \log_c a = \log_c b$ или $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, откуда

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Формула перехода от одного основания логарифма к другому

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Полезно запомнить частный случай формулы перехода, когда одно из оснований является степенью другого:

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

Рассмотрим несколько примеров уравнений и неравенств, в решении которых применяются свойства логарифмов.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2 x = 3 - 4 \log_2 \sqrt{3} + 3 \log_2 3.$$

Решение. Используя свойства логарифма произведения, частного и степени «справа налево», представим правую часть равенства в виде логарифма с основанием 2:

$$3 - 4 \log_2 \sqrt{3} + 3 \log_2 3 = \log_2 2^3 - \log_2 (\sqrt{3})^4 + \log_2 3^3 =$$
$$= \log_2 \frac{2^3 \cdot 3^3}{(\sqrt{3})^4} = \log_2 \frac{8 \cdot 3^3}{3^2} = \log_2 (8 \cdot 3) = \log_2 24.$$

Пришли к равенству $\log_2 x = \log_2 24$. *Потенцируя* это равенство, т. е. находя число по известному его логарифму, получим $x = 24$.

Ответ: 24.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3 (x^2 - 4) = 4.$$

Решение. Выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны при $x < -2$ и при $x > 2$. Этим условием определяется ОДЗ данного уравнения. Для всех значений x из ОДЗ можно применить к левой части уравнения свойство логарифма произведения:

$$\log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3 (x^2 - 4) = \log_3 \left(\frac{x-2}{x+2} (x^2 - 4) \right) =$$
$$= \log_3 \frac{(x-2)(x-2)(x+2)}{x+2} = \log_3 (x-2)^2.$$

По определению логарифма от равенства $\log_3 (x-2)^2 = 4$ приходим к равенству $(x-2)^2 = 3^4$.

Далее имеем $x - 2 = \pm 9$, $x_1 = 11$, $x_2 = -7$. Оба найденных числа входят в ОДЗ, а значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: -7; 11.

Примечание 1. В левой части уравнения $\log_3 (x-2)^2 = 4$ можно было воспользоваться свойством логарифма степени: $\log_3 (x-2)^2 = 2 \log_3 |x-2|$ (модуль необходимо поставить, чтобы не потерять корни, при которых выражение $x - 2$ принимает отрицательные значения). Вообще, полезно иметь в виду, что

$$\boldsymbol{\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|}, \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

П р и м е ч а н и е 2. Свойствами логарифмов в преобразованиях выражений с переменными следует пользоваться осторожно, поскольку они могут изменить область допустимых значений переменных. Так, например, применив в левой части рассмотренного уравнения свойства логарифмов частного и произведения, вы получили бы уравнение

$$\log_3(x-2)-\log_3(x+2)+\log_3(x-2)+\log_3(x+2)=4,$$
$$2\log_3(x-2)=4,$$

ОДЗ которого $x > 2$ является лишь частью ОДЗ исходного уравнения. Далее:

$$\log_3(x-2)=2,\ x-2=9,\ x=11.$$

При таком решении корень -7 оказался «съеден» уменьшением или, как говорят математики, *сужением* ОДЗ. Понятно, что потерю корней нельзя обнаружить проверкой оставшихся корней, поэтому желательно *избегать сужения области допустимых значений*.

Пример 3. Решить уравнение

$$2\log_x 5-3\log_5 x=1.$$

Р е ш е н и е. Приведём логарифмы левой части уравнения к одному основанию:

$$\log_x 5=\frac{\log_5 5}{\log_5 x}=\frac{1}{\log_5 x},\quad \frac{2}{\log_5 x}-3\log_5 x=1.$$

При $x \neq 1$ умножение уравнения на $\log_5 x$ не нарушает равносильность преобразования

$$3\log_5^2 x+\log_5 x-2=0.$$

Решая полученное уравнение как квадратное относительно $\log_5 x$, получаем:

$$\log_5 x_1=-1,\ x_1=\frac{1}{5};\ \log_5 x_2=\frac{2}{3},\ x_2=\sqrt[3]{25}.$$

О т в е т: $\frac{1}{5};\sqrt[3]{25}$.

В предыдущем пункте был поставлен вопрос о том, как вычислять значения логарифмов. Проще всего значение логарифма можно найти с помощью инженерного калькулятора. Как правило, калькуляторы позволяют непосредственно находить значения логарифмов на выбор по одному из оснований 10 или $e \approx 2{,}7$ (более близкое знакомство с числом e ожидает вас в следующем классе).

Десятичные логарифмы (логарифмы с основанием 10) широко применялись в вычислительной практике в докомпьютерный период, а логарифмы с основанием e, так называемые *натуральные логарифмы*, используются в различных научных расчётах. Широкое распространение логарифмов с основаниями 10 и e дало им право на специальные обозначения:

$$\log_{10} a = \lg a, \ \log_e a = \ln a.$$

На инженерном калькуляторе для вычисления значения десятичного логарифма имеется клавиша «log», для натурального логарифма — клавиша «ln». А для вычисления логарифмов с другими основаниями есть формула перехода.

Пусть, например, нужно найти значение lg 23,5. Набираем число 23,5 и нажимаем клавишу «log». Дисплей калькулятора покажет число 1,37106786227173626920048050472471 (рис. 59), которое затем округляется с нужной точностью.

Логарифмы, как средство для упрощения вычислений, были изобретены в начале XVII в. Титанический труд швейцарца И. Бюрги, шотландца Д. Непера, англичанина Г. Бригса и голландца А. Влакка, составивших многозначные логарифмические таблицы, более 300 лет помогал людям выполнять различные вычисления. «*Открытие логарифмов*, — как сказал знаменитый французский математик, физик и астроном Пьер Лаплас, — *удлинило человеческую жизнь, если оценивать её не числом прожитых лет, а количеством сделанной работы*».

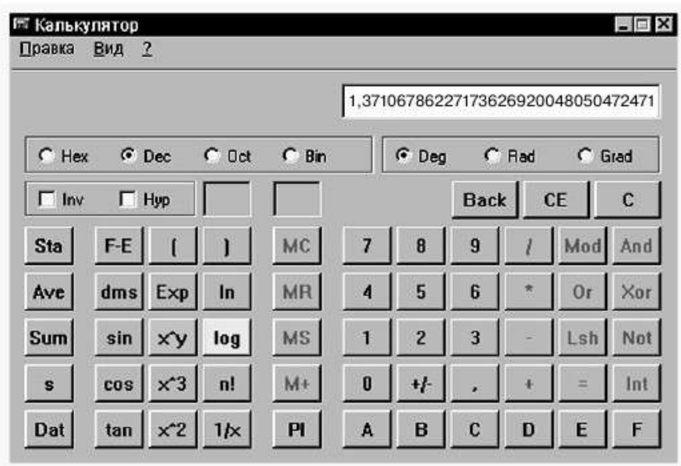


Рис. 59

▼ Генри Бригс составил 14-значные логарифмические таблицы. С принципом их использования познакомимся на примере двузначной таблицы десятичных логарифмов.

	0,0	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
1	0,00	0,04	0,08	0,11	0,15	0,18	0,20	0,23	0,26	0,28
2	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,41	0,43	0,45	0,46
3	0,48	0,49	0,51	0,52	0,53	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59
4	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69
5	0,70	0,71	0,72	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,76	0,77
6	0,78	0,79	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84
7	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	0,88	0,88	0,89	0,89	0,90
8	0,90	0,91	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95
9	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00

В этой таблице с двумя входами указаны значения десятичных логарифмов чисел от 1 до 9,9. Пусть, например, нужно найти $\lg 6{,}4$. Значение этого логарифма находим на пересечении строки 6 и столбца 0,4: $\lg 6{,}4 \approx 0{,}81$.

Вычислим корень уравнения $2^x = 3$, с которого в предыдущем пункте начался разговор о логарифмах:

$$x = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx \frac{0{,}48}{0{,}30} = 1{,}6.$$

Не слишком большая точность, но ведь и таблица двузначная.

В таблице нет значений логарифмов чисел, бóльших 9,9 и меньших 1. Однако таблицу можно использовать и для них. Так, например,

$$\lg 438 = \lg (4{,}38 \cdot 100) = \lg 4{,}38 + \lg 100 \approx$$
$$\approx \lg 4{,}4 + 2 \approx 0{,}64 + 2 = 2{,}64 \approx 2{,}6.$$

$$\lg 0{,}078 = \lg (7{,}8 \cdot 10^{-2}) = \lg 7{,}8 + \lg 10^{-2} \approx 0{,}89 - 2 =$$
$$= -1{,}11 \approx -1{,}1.$$

Примечание. Заметим, что в обоих случаях число, стоявшее под знаком логарифма, было представлено в стандартном виде: $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое. В этом случае сам логарифм представляется в виде суммы своей дробной и целой частей: $\lg(a \cdot 10^n) = \lg a + n$. Дробную часть десятичного логарифма называют ***мантиссой***, а целую — ***характеристикой***.

Покажем теперь, как использовались логарифмы в вычислении значений выражений.

Пример 4. Вычислить приближённо

$$\frac{0{,}63^2}{0{,}57^5 \cdot \sqrt{23}}.$$

Решение. Обозначим буквой x данное выражение $\left(x = \dfrac{0{,}63^2}{0{,}57^5 \cdot \sqrt{23}}\right)$ и прологарифмируем полученное равенство по основанию 10:

$$\lg x = \lg \frac{0{,}63^2}{0{,}57^5 \cdot \sqrt{23}} = \lg 0{,}63^2 - \lg(0{,}57^5 \cdot \sqrt{23}) =$$

$$= 2\lg 0{,}63 - \left(5\lg 0{,}57 + \frac{1}{2}\lg 23\right) =$$

$$= 2\lg 0{,}63 - 5\lg 0{,}57 - \frac{1}{2}\lg 23.$$

Найдём значения логарифмов:

$$\lg 0{,}63 \approx 0{,}80 - 1 = -0{,}20,\ \lg 0{,}57 \approx 0{,}76 - 1 = -0{,}24,$$
$$\lg 23 \approx 0{,}36 + 1 = 1{,}36$$

и подставим их в полученное выражение:

$$\lg x \approx 2 \cdot (-0{,}20) - 5 \cdot (-0{,}24) - \frac{1}{2} \cdot 1{,}36 \approx$$

$$\approx -0{,}40 + 1{,}20 - 0{,}68 = 0{,}12.$$

Наиболее близкие из значений, имеющихся в таблице 0,11 и 0,15, соответствуют $\lg 1{,}3$ и $\lg 1{,}4$, значит, $\lg 1{,}3 < \lg x < \lg 1{,}4$ и $1{,}3 < x < 1{,}4$. С помощью двузначной таблицы и нельзя было надеяться более чем на две значащие цифры, однако все вычисления мы выполнили устно. Проверяя результат с помощью калькулятора, находим $x \approx 1{,}375$. △

Упражнения

176. Из каких свойств степеней получается формула:

1) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$; 2) $\log_a b^p = p \log_a |b|$?

177. Найдите значение выражения:

1) $\log_6 2 + \log_6 3$;
2) $\log_{\frac{1}{15}} 25 + \log_{\frac{1}{15}} 9$;
3) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{\sqrt{3}} 4$;
4) $\log_2 12 + \log_{0,5} 3$;
5) $\log_3 18 + \log_{\frac{1}{3}} 2$;
6) $\log_5 135 - \log_5 5{,}4$;
7) $\dfrac{60}{6^{\log_6 5}}$;
8) $36^{\log_6 13}$.

178. Зная, что $\log_6 2 = a$, выразите через a выражение:

1) $\log_6 16$;
2) $\log_{\sqrt{6}} 2$;
3) $\log_{\sqrt[5]{36}} 8$;
4) $\log_{\sqrt[4]{216}} 0{,}125$;
5) $\log_2 6$;
6) $\log_6 3$.

179. Найдите: 1) $\lg 56$, зная, что $\lg 2 = a$ и $\lg 7 = b$;
2) $\log_{30} 8$, зная, что $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

180. Найдите число a, зная, что:

1) $\log_3 a = 3 + 2 \log_{\sqrt{3}} 7 - \frac{1}{2} \log_9 16 - 4 \log_3 7$;

2) $\log_2 a = \log_4 7 + 2 \log_{\sqrt{2}} 3 + 0{,}5 \log_{0,5} 7 - 2$.

181. Найдите натуральное число n такое, что:

1) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 3^{3n-1} = 81^{10}$;
2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n (n+1) = 10$.

182. Найдите корень уравнения:

1) $\log_2 (4 - x) = 7$;
2) $\log_{\frac{1}{7}} (7 - x) = -2$;
3) $\log_3 (14 - x) = \log_3 5$;
4) $\log_5 (6 - 5x) = 2 \log_5 6$;
5) $\log_3 (9 - x)^2 = 4$;
6) $\log_4 (x + 6)^2 = \log_4 (5x - 14)^2$.

183. При решении следующих уравнений называйте свойства логарифмов, которые вы используете в преобразованиях, и подумайте, изменяют ли выполняемые преобразования ОДЗ (и если да, то как):

1) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

2) $\log_5 (3x - 2) + \log_5 (x - 7) = 2 + \log_5 2$;

3) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$;

4) $\log_{\sqrt{5}} (4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}} (2^x - 2) = 2$;

5) $\lg (5^x + x - 20) = x - x \lg 2$;

6) $3 \log_5 2 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x})$;

7) $\log_3 (81^x + 3^{2x}) = 3 \log_{27} 90$;

8) $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0{,}5 = 0$;

9) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$;

10) $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$;

11) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$.

184. Решите уравнение, логарифмируя обе его части:

1) $x^{\lg x} = 10\,000$;

2) $x^{\log_2 x + 2} = 8$;

3) $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$;

4) $x^{1 - \lg x} = 0{,}01$;

5) $x^{\log_3 3x} = 9$;

6) $x^{\log_2 x} = 4x$;

7) $2^x = 3^{x-2}$;

8) $10^{2x+1} = 7^x$;

9) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x}$;

10) $5^{x+1} = 0{,}2 \cdot 3^{2x+1}$.

185. 1) Сравните выражения $a^{\log_b c}$ и $c^{\log_b a}$.

2) На основании сформулированного вывода решите уравнение:

а) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$;

б) $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$.

186. Решите уравнение:

1) $2 \lg x^2 - \lg^2 (-x) = 4$;

2) $3 \lg x^2 - \lg^2 (-x) = 9$.

187. Решите неравенство:

1) $\log_\pi (x + 27) - \log_\pi (16 - 2x) < \log_\pi x$;

2) $\log_{\sqrt{3}-1} (2x + 3) + \log_{\sqrt{3}-1} (4 - x) < \log_{\sqrt{3}-1} (2 - 3x)$;

3) $\log_{\pi-3} (2 - 7x) - \log_{\pi-3} (2 - 3x) > \log_{\pi-3} (x + 4)$;

4) $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right) > -3$;

5) $\log_3 (4^x + 1) + \log_{4^x+1} 3 > 2{,}5$.

188. 1) С помощью двузначной таблицы логарифмов (см. с. 91) найдите приближённые значения:

а) $\dfrac{7{,}2^{0{,}4}}{\sqrt{3{,}9}}$;

в) $\dfrac{0{,}043\sqrt[3]{78}}{12}$;

б) $\dfrac{4{,}8^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5{,}4^{-3}}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[3]{441}}{0{,}78\sqrt[5]{81}}$.

2) Укажите с помощью калькулятора значения этих выражений с четырьмя верными значащими (кроме нулей в начале записи числа) цифрами.

! Контрольные вопросы и задания

1. Что происходит с ОДЗ при замене $\log_a (x(x + 3))$ на $\log_a x + \log_a (x + 3)$? Что происходит с ОДЗ при обратной замене? В каком случае могут потеряться корни? В каком случае могут образоваться посторонние корни?

2. В каком случае при замене $\log_a (x + 4)^c$ на $c \log_a (x + 4)$ может произойти изменение ОДЗ? Могут ли при этом преобразовании появиться посторонние корни?

3. Решите уравнение $\log_3 x^2 + \log_9 x - \log_{\sqrt[3]{3}} x = 1$.

4. Как с помощью таблицы значений десятичных логарифмов найти значения логарифмов чисел, бóльших 10? Найдите с помощью двузначной таблицы логарифмов lg 0,0057.

? Вопросы для самооценки

1. Оцените результаты изучения этой главы. Довольны ли вы ими?

2. Что нового вы узнали в этой главе?

3. Как могут пригодиться вам эти знания в повседневной жизни?

4. Какие задания в этой главе были для вас самыми трудными? Почему?

Глава 4

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Слово «тригонометрия» произошло от двух греческих слов *«тригонон»* — треугольник и *«метрео»* — измеряю, и его можно перевести как знакомое вам по курсу планиметрии *«решение треугольников»*. При решении прямоугольного треугольника вы впервые встретились с синусом и косинусом острого угла. В этой главе вы расширите своё знакомство с синусом, косинусом, а также познакомитесь ещё с двумя тригонометрическими функциями: тангенсом и котангенсом.

12. Угол поворота

В курсе геометрии было достаточно углов, не превосходящих $360°$. Иначе обстоит дело в ряде задач механики, связанных с вращательным движением. В этих задачах часто используют понятие угловой скорости вращения — угол поворота в единицу времени.

На рисунке 60 изображён проигрыватель грампластинок. В зависимости от положения переключателя грампластинка совершает 33, 45 или 78 оборотов в минуту. Найдём, на какой угол поворачивается пластинка за 1 с при каждом из положений переключателя.

Учитывая, что один оборот — это поворот на угол $360°$, имеем:

$$33 \text{ об/мин} = \frac{33 \cdot 360°}{60 \text{ с}} = 198 \text{ град/с},$$

$$45 \text{ об/мин} = \frac{45 \cdot 360°}{60 \text{ с}} = 270 \text{ град/с},$$

$$78 \text{ об/мин} = \frac{78 \cdot 360°}{60 \text{ с}} = 468 \text{ град/с}.$$

Рис. 60

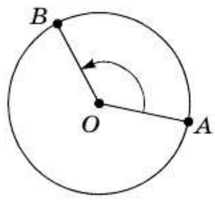


Рис. 61

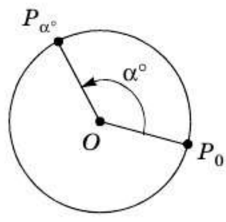


Рис. 62

В последнем случае угол, на который поворачивается диск проигрывателя за 1 с, оказался больше 360°. В технике часто встречаются скорости вращения, достигающие сотен оборотов в секунду, поэтому приходится рассматривать углы, во много раз превышающие 360°. Так, например, лазерный диск, пришедший на смену грампластинке, вращается уже со скоростью до 900 об/мин, а диски в винчестере современного персонального компьютера — со скоростью 15 000 об/мин.

Пусть, двигаясь по окружности, точка перешла из начального положения A в конечное положение B (рис. 61). При этом она повернулась вокруг центра окружности на некоторый угол.

Обозначим угол поворота через $\alpha°$, начальную точку поворота через P_0 и конечную точку поворота через $P_{\alpha°}$ (рис. 62).

Однако знать начальную и конечную точки поворота ещё недостаточно, чтобы однозначно определить величину угла $\alpha°$, так как неизвестно, сколько оборотов и в каком направлении (по часовой стрелке или против) совершила точка. На рисунке 63 изображено несколько вариантов возможного перемещения точки. Очевидно, что существует бесконечно много подобных поворотов.

Условились считать *углы поворота против часовой стрелки* ***положительными***, *а по часовой стрелке —* ***отрицательными***.

Так, на рисунке 63, *а* угол поворота равен 120°, на рисунке 63, *б* изображён поворот на угол −240°, а на рисунке 63, *в*

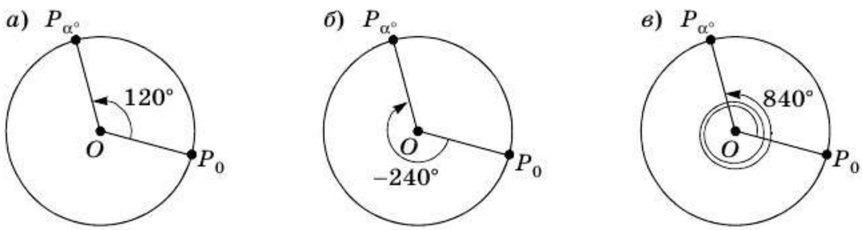


Рис. 63

поворот состоит из двух полных оборотов против часовой стрелки и поворота на угол $120°$, значит, угол этого поворота равен $120° + 360° \cdot 2 = 840°$.

Заметим, что любые два поворота с начальной точкой P_0 и конечной точкой $P_{\alpha°}$ отличаются друг от друга на целое число полных оборотов, т. е. на $360° \cdot n$, где n — целое число.

В рассмотренном случае общий вид углов $\alpha°$ будет равен $120° + 360° \cdot n$, где n — любое целое число.

> Общий вид углов поворота с конечной точкой $P_{\alpha°}$:
> $\boldsymbol{\alpha° + 360° \cdot n}$ (n — любое целое число).

Подставляя в выражение $\alpha° + 360° \cdot n$ вместо n числа ± 1, ± 2, ± 3 и т. д., будем получать углы, повороты на которые имеют одну и ту же конечную точку $P_{\alpha°}$.

Упражнения

189. Приведите несколько примеров вращательного движения.

190. Барабан стиральной машины в режиме отжима может совершать или 400, или 600 оборотов в минуту. Найдите, с какой угловой скоростью вращается барабан в каждом из этих случаев.

191.° Сравните значения угла поворота минутной и часовой стрелок часов за:

1) 20 мин;
2) 2 ч 45 мин;
3) 1 ч 20 мин;
4) 7 ч 10 мин.

192.• Два ученика, наблюдавшие за проехавшим велосипедистом, поспорили. Один заявил, что колёса велосипеда вращались по часовой стрелке, а другой — что против. Могут ли они оба быть правы?

193.° Ведущая и ведомая звёздочки одной из моделей велосипеда имеют соответственно 40 и 15 одинаковых зубьев (рис. 64). На какой угол повернётся ведомая звёздочка, если ведущая повернётся на угол:

1) $360°$;
2) $540°$?

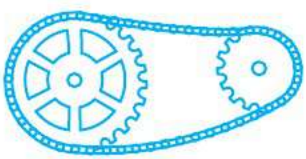


Рис. 64

194. Представьте угол в виде $\alpha^\circ + 360^\circ n$, где n — целое число и $0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$:

1) 840°; 3) -170°; 5) 3200°; 7) -2450°;
2) 1200°; 4) -390°; 6) 3500°; 8) -3100°.

195. 1) Представьте угол в виде $\alpha^\circ + 360^\circ n$, где n — целое число и $-180^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$:

а) 700°; б) 3500°; в) -470°; г) -2890°.

2) С помощью транспортира постройте на окружности начальную и конечную точки поворота на данный угол.

196. Выпишите все углы, модули которых не превышают 1000°:

1) $40^\circ + 360^\circ n$; 2) $-70^\circ + 360^\circ n$ (n — целое число).

197. 1) Постройте точку P_{30° — конечную точку поворота на угол 30°. Постройте: а) квадрат; б) равносторонний треугольник с вершинами на окружности так, чтобы одной из вершин была точка P_{30°. Для каждой из вершин укажите общий вид углов поворота с конечной точкой в этой вершине.

2) В каждом случае задайте одним выражением общий вид всех таких углов.

198. 1) Постройте окружность с центром в начале координат. За начальную точку поворота возьмите точку её пересечения с осью абсцисс. Постройте точку P_{70° — конечную точку поворота на угол 70°.

2) Постройте точку P_{β° — конечную точку поворота на угол β° так, чтобы точки P_{70° и P_{β° были симметричны:

а) относительно оси абсцисс;
б) относительно оси ординат;
в) относительно начала координат.

3) Для каждого случая укажите:

а) наименьшее по модулю значение β;
б) наименьшее положительное значение β.

! Контрольные вопросы и задания

1. Укажите какой-нибудь отрицательный угол, поворот на который имеет ту же конечную точку, что и поворот на угол 100°.
2. Укажите общий вид углов, поворот на которые имеет конечную точку P_{195°.
3. Постройте с помощью транспортира конечные точки поворотов на углы 145°, 215° и -250°.

13. Радианная мера угла

Уже в Древнем Вавилоне задолго до нашей эры углы измеряли в градусах. Градус, как вы знаете, — это $\frac{1}{360}$ часть полного оборота. Иногда такая единица измерения оказывается слишком большой. Так, например, в артиллерии при указании цели углы измеряют в *тысячных* (шеститысячных долях полного оборота), которые были введены во Франции в конце XVIII в.

В этом пункте вы познакомитесь ещё с одним способом измерения углов, который наиболее часто применяют в математике.

Рассмотрим центральный угол в $\alpha°$, которому соответствуют дуги двух произвольных концентрических окружностей: дуга A_1B_1 длиной l_1 и дуга A_2B_2 длиной l_2 (рис. 65). Обозначим радиусы этих окружностей соответственно через R_1 и R_2.

Фигуры A_1OB_1 и A_2OB_2 подобны, поэтому отношение длины дуги, соответствующей центральному углу в $\alpha°$, к радиусу окружности не зависит от размера окружности, а зависит только от величины угла $\alpha°$.

Следовательно, частное $\frac{l}{R}$ можно использовать для определения величины соответствующего центрального угла.

В том случае, когда длина дуги равна радиусу окружности $\left(\frac{R}{R}=1\right)$, получается угол в 1 *радиан* — единицу *радианной меры* угла.

> Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в 1 радиан**.

Чтобы установить связь между градусной и радианной мерами одного и того же угла, рассмотрим центральный угол в 180°. Он опирается на половину окружности — дугу длиной πR. Радианная мера этого угла равна $\frac{\pi R}{R}=\pi$ рад. Таким образом, $180°=\pi$ рад. Разделив обе части равенства на 180,

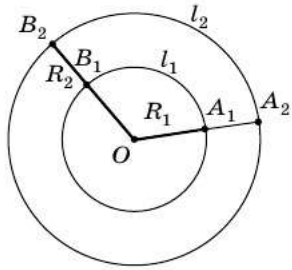


Рис. 65

получим, что $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад. И наконец, умножив это равенство на α, получим формулу перевода градусной меры в радианную:

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180} \text{ рад.} \qquad (1)$$

Аналогично, из равенства π рад $= 180^\circ$ можно получить формулу перехода из радианной меры в градусную:

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha 180^\circ}{\pi}. \qquad (2)$$

Формулы перевода градусной меры в радианную и обратно

$$\boldsymbol{\alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180}} \textbf{ рад} \quad \boldsymbol{\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha 180^\circ}{\pi}}$$

Пример 1. Выразить в радианах величину угла: 30°, 40°, -480°.

Решение. Воспользуемся формулой (1):

$$30^\circ = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ рад}, \quad 40^\circ = \frac{40 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \text{ рад},$$

$$-480^\circ = \frac{-480 \cdot \pi}{180} = -2\frac{2}{3}\pi \text{ рад.}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{9}$, $-2\frac{2}{3}\pi$.

Пример 2. Выразить в градусах величину угла:

$$\frac{\pi}{3}, \ \frac{3\pi}{2}, \ -6 \text{ радиан.}$$

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$\frac{\pi}{3} \text{ рад} = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{3 \cdot \pi} = 60^\circ, \ \frac{3\pi}{2} \text{ рад} = \frac{3\pi \cdot 180^\circ}{2 \cdot \pi} = 270^\circ,$$

$$-6 \text{ рад} = \frac{-6 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx \frac{-6 \cdot 180^\circ}{3{,}14} \approx -344^\circ.$$

Ответ: $60°, 270°, -344°$.

Как отношение одноимённых величин, радианная мера угла является *числом*, поэтому обозначение *рад* обычно не указывают, записывая просто $\frac{\pi}{3} = 60°$, $270° = \frac{3\pi}{2}$, $-30° = -\frac{\pi}{6}$ и т. п. Таким образом, радианная мера позволяет для измерения углов использовать действительные числа, что особенно важно в математике, имеющей дело с числовыми множествами.

▼ Радианная мера углов позволяет значительно упростить многие формулы физики и математики. Выразим, например, с помощью радианной меры угла зависимость между *угловой* (ω) и *линейной* (v) *скоростями* равномерного движения по окружности.

Пусть за t секунд материальная точка проходит по окружности радиусом R путь, равный l, и совершает при этом поворот вокруг центра окружности на угол φ. Тогда линейная скорость точки: $v = \frac{l}{t}$, а угловая её скорость: $\omega = \frac{\varphi}{t}$.

Из равенства $\varphi = \frac{l}{R}$ находим, что $l = \varphi R$. Подставим произведение φR вместо l в формулу линейной скорости:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{\varphi R}{t} = \omega R.$$

Линейная скорость равномерного движения по окружности равна произведению угловой скорости на радиус окружности $v = \omega R$. △

Градусная мера углов обычно применяется при решении практических задач.

Упражнения

199. Переведите угол из градусной меры в радианную:

1) $0°$; 3) $20°$; 5) $125°$; 7) $-225°$;
2) $1°$; 4) $45°$; 6) $185°$; 8) $-375°$.

200. Переведите угол из радианной меры в градусную:

1) π; 4) $-0{,}3\pi$; 7) 2π; 10) $2{,}4$;
2) $\frac{2\pi}{5}$; 5) 2π; 8) $1{,}8\pi$; 11) $0{,}36$;
3) $0{,}2\pi$; 6) $\frac{\pi}{4}$; 9) 2; 12) $-\frac{7}{10}\pi$.

201. Переведите угол из градусной меры в радианную, представляя результат в виде произведения $k\pi$, где k — рациональное число:

1) $36°$; 4) $265°$; 7) $100°$; 10) $1020°$;
2) $48°$; 5) $-120°$; 8) $105°$; 11) $-2510°$;
3) $225°$; 6) $-135°$; 9) $870°$; 12) $-2940°$.

202. Запишите в таблицу радианные меры φ указанных углов.

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$330°$	$360°$
φ												

203. 1) На рисунке 66 в окружности проведены 8 диаметров. Скопируйте рисунок в тетрадь. У концов диаметров укажите углы поворотов в градусной и в радианной мере.
2) Укажите углы конечных точек поворотов, которые симметричны относительно:
а) горизонтального диаметра;
б) вертикального диаметра.

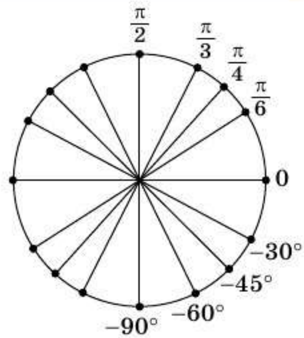


Рис. 66

204. Зная, что $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$, переведите в радианную меру величину угла:

1) $20°$; 4) $-100°$; 7) $1030°$;
2) $50°$; 5) $250°$; 8) $1300°$;
3) $-80°$; 6) $310°$; 9) $-1600°$.

205. Окружность морского компаса делится на 32 равные части, называемые румбами. Выразите румб в градусах и радианах.

206. Переведите из радианной меры в градусную, взяв $\pi \approx 3{,}14$:

1) $0{,}25$; 3) $-1{,}625$; 5) $1{,}15$; 7) $-4{,}382$;
2) $3{,}45$; 4) $5{,}285$; 6) $2{,}64$; 8) $7{,}168$.

207. Напишите общий вид углов поворота вокруг начала координат, переводящих точку $P(1; 0)$ окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, в точку:

1) $M(0; 1)$; 2) $N(0; -1)$; 3) $K(-1; 0)$.

208. 1)○ С какой угловой скоростью ω (рад/ч) Земля вращается вокруг своей оси?
2)● С какой линейной скоростью v (км/ч) при этом движется точка экватора Земли, отстоящая от оси на расстояние 6370 км? Выполните вычисления с помощью двузначной таблицы логарифмов (с. 91).

209. Шкив скоростного электродвигателя делает 120 000 оборотов в минуту. Определите угловую скорость вращения этого шкива:
1) в градусах в секунду; 2) в радианах в секунду.

210. Что означает слово «радиальная» в словосочетаниях «радиальная линия метро», «радиальная планировка города»?

! Контрольные вопросы и задания

1. Что такое угол в один радиан?

2. Выразите:
а) в градусах $1{,}2\pi$, $-0{,}7\pi$; б) в радианах $64°$, $-145°$.

3. Постройте на окружности начальную и конечную точки поворота на угол: $135°$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{6}$.

14. Синус и косинус любого угла

При решении прямоугольных треугольников находят синус и косинус острых углов. В теоремах синусов и косинусов для косоугольных треугольников появляются и тупые углы.

Теперь предстоит находить синусы и косинусы произвольных углов, с которыми вы познакомились в двух предыдущих пунктах. Но сначала напомним, как определяется синус и косинус острого угла в прямоугольном треугольнике (рис. 67).

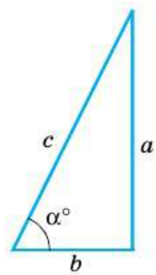


Рис. 67

Синус угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. $\sin\alpha° = \frac{a}{c}$	**Косинус угла** равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. $\cos\alpha° = \frac{b}{c}$

Полезно помнить значения синусов и косинусов некоторых острых углов.

$\alpha°$	$30°$	$45°$	$60°$
φ рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin φ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos φ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Синус и косинус произвольного угла придётся определять по-другому. Рассмотрим для этого *единичную окружность* — окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

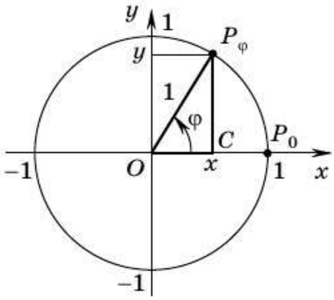


Рис. 68

Пусть, двигаясь по этой окружности, точка перешла из начальной точки P_0 (1; 0) в конечную точку P_φ (рис. 68). Положение точки P_φ можно определить двумя способами: указав величину угла φ или указав её координаты x и y в данной системе координат.

Для углов от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (от 0° до 90°) координаты точки P_φ найдём из прямоугольного треугольника $P_\varphi CO$ (см. рис. 68), гипотенуза которого равна 1:

$$x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi.$$

Равенства остаются верными для любых углов, если определить косинус и синус следующим образом.

Синусом угла φ называется ордината конечной точки поворота точки (1; 0) вокруг начала координат на угол φ.

$$y = \sin\varphi$$

Косинусом угла φ называется абсцисса конечной точки поворота точки (1; 0) вокруг начала координат на угол φ.

$$x = \cos\varphi$$

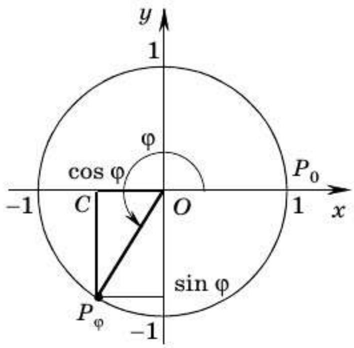


Рис. 69

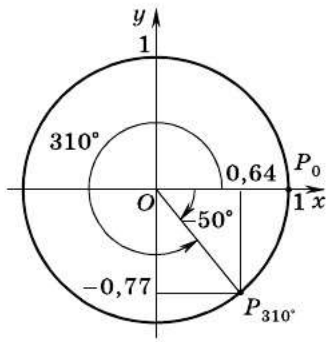


Рис. 70

Таким образом, *абсцисса любой точки единичной окружности равна косинусу, а её ордината — синусу соответствующего угла* (рис. 69).

Рассматривая φ как переменную, заметим, что любому её значению соответствует единственное значение выражения cos φ и единственное значение выражения sin φ. Следовательно, формулы

$$\boldsymbol{x = \cos\varphi} \text{ и } \boldsymbol{y = \sin\varphi}$$

задают *функции* переменной φ.

Пример 1. Найти синус и косинус угла 310°.

Решение. Построим единичную окружность с центром в начале координат. Точка $P_0(1; 0)$ — начальная точка поворота (рис. 70).

Поворот на угол 310° можно заменить одним полным оборотом на 360° и поворотом на угол −50°: $310° = 360° - 50°$.

Отложим от начальной точки P_0 с помощью транспортира угол, равный −50°, и найдём координаты точки $P_{310°}$ — конечной точки поворота на угол 310°: $x \approx 0{,}64$, $y \approx -0{,}77$.

Ответ: $\cos 310° \approx 0{,}64$, $\sin 310° \approx -0{,}77$.

В зависимости от величины угла конечная точка может оказаться в любой из четырёх координатных четвертей.

По положению конечной точки углы называют углами I, II, III *или* IV *четверти.*

В рассмотренной задаче конечная точка находилась в IV четверти (см. рис. 70), значит, 310° — угол IV четверти.

Пример 2. Найти приближённо углы, косинусы которых равны 0,8.

Решение. Косинус — это абсцисса соответствующей точки единичной окружности. Все точки с абсциссами, равными 0,8, принадлежат прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $C(0,8;\ 0)$ (рис. 71). Эта прямая пересекает единичную окружность в двух точках: P_{α° и P_{β°, симметричных относительно оси абсцисс.

С помощью транспортира находим, что угол α° приближённо равен 37°. Значит, общий вид углов поворота с конечной точкой P_{α°:

$$\alpha^\circ \approx 37^\circ + 360^\circ n,\ n \text{ — любое целое число.}$$

В силу симметрии относительно оси абсцисс точка P_{β° — конечная точка поворота на угол -37°. Значит, для неё общий вид углов поворота:

$$\beta^\circ \approx -37^\circ + 360^\circ n,\ n \text{ — любое целое число.}$$

Ответ: $37^\circ + 360^\circ n$, $-37^\circ + 360^\circ n$, n — любое целое число.

Пример 3. Найти углы, синусы которых равны 0,5.

Решение. Синус — это ордината соответствующей точки единичной окружности. Все точки с ординатами, равными 0,5, принадлежат прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $D(0;\ 0,5)$ (рис. 72).

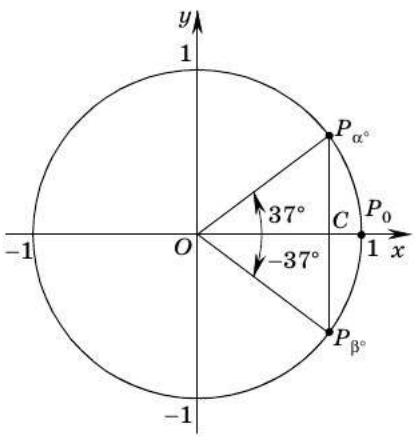


Рис. 71

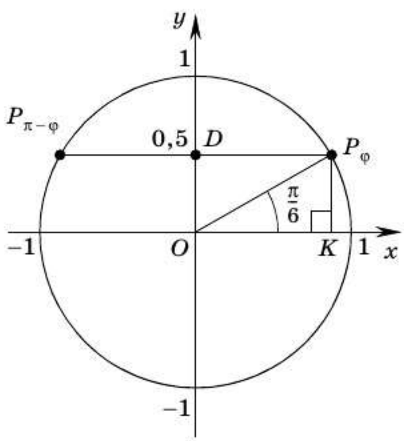


Рис. 72

Эта прямая пересекает единичную окружность в двух точках: P_φ и $P_{\pi-\varphi}$, симметричных относительно оси ординат.

В прямоугольном треугольнике OKP_φ катет KP_φ равен половине гипотенузы OP_φ, значит, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Общий вид углов поворота с конечной точкой P_φ:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \text{ — любое целое число.}$$

Общий вид углов поворота с конечной точкой $P_{\pi-\varphi}$:

$$\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \text{ — любое целое число.}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, n — любое целое число.

Упражнения

211. 1) Даны координаты точки P_α единичной окружности. Укажите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

а) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$;

в) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$;

г) $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

2) В какой координатной четверти расположена каждая точка?

212. Определите, в какой координатной четверти находится P_α — конечная точка поворота на угол α, и каковы знаки $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если угол α равен:

1) $93°$; 2) $168°$; 3) $190°$; 4) $260°$; 5) $290°$; 6) $565°$; 7) $480°$; 8) $-915°$; 9) $-825°$.

213.○ Используя рисунок единичной окружности, определите знаки $\cos\beta$ и $\sin\beta$, если:

1) $\beta = \frac{\pi}{3}$; 2) $\beta = \frac{2\pi}{3}$; 3) $\beta = \frac{4\pi}{9}$; 4) $\beta = -1{,}6\pi$; 5) $\beta = -\frac{5\pi}{9}$; 6) $\beta = 1{,}2\pi$.

214.○ С помощью единичной окружности найдите:

1) $\sin 420°$; 2) $\cos 810°$; 3) $\sin 1115°$; 4) $\cos 1490°$; 5) $\sin(-2120°)$; 6) $\cos(-2030°)$.

215. Найдите общий вид углов, для которых число:

1) $0{,}4$; 3) $-0{,}6$; 5) $\frac{2}{3}$;

2) $0{,}7$; 4) $-0{,}3$; 6) $-\frac{3}{4}$

является: а) синусом; б) косинусом.

216. В каких координатных четвертях знаки синуса и косинуса:

1) совпадают; 2) противоположны?

217. Постройте точку P_α и найдите $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если:

1) $\alpha° = 72°$; 3) $\alpha° = 105°$;
2) $\alpha° = 320°$; 4) $\alpha° = 215°$.

218. Найдите углы:

1) синус которых равен: а) $0{,}5$; б) $-0{,}5$;
2) косинус которых равен: а) $0{,}5$; б) $-0{,}5$.

219. Найдите значение выражения:

1) $3\sin 90° - 2\cos 270°$; 4) $2\sin 270° - 3\cos 180°$;
2) $4\cos 0° - 3\sin 270°$; 5) $3\cos 270° + 5\sin 0°$;
3) $\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}$; 6) $\sin\frac{3\pi}{2}\cos\pi$.

220. Для каких углов от $0°$ до $360°$:

1) синус равен косинусу;
2) синус противоположен косинусу;
3) синус и косинус имеют равные модули;
4) синус больше косинуса;
5) синус меньше косинуса?

221. Заполните таблицу.

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$				
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$				

Окончание табл.

$\alpha°$	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
φ								
$\sin\varphi$								
$\cos\varphi$								

222. Найдите x, y и z — углы треугольника в радианах, если $\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}$.

223. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{\sin 165°}$;
2) $\lg \sin 195°$;
3) $\log_{0,5} \cos 243°$;
4) $\sqrt{\cos 287°}$;
5) $\sqrt{\cos \frac{4\pi}{7}}$;
6) $\log_3 \cos \frac{11\pi}{5}$;
7) $\sqrt{\sin 40° - \cos 40°}$;
8) $\log_{0,6} (\sin 50° - \cos 50°)$;
9) $\ln (\sin 1 - \cos 1)$;
10) $\sqrt{\sin 7 - \cos 7}$?

224. Укажите все значения φ из промежутка $[0;\ 2\pi]$, для которых верно равенство:

1) $\sin\varphi = 1$;
2) $\cos\varphi = 1$;
3) $\sin\varphi = -1$;
4) $\cos\varphi = -1$.

225. Запишите общий вид углов φ, для которых верно равенство:

1) $\sin\varphi = 0$;
2) $\cos\varphi = 0$.

226. Укажите все значения φ, при которых не имеет смысла выражение:

1) $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$;
2) $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$;
3) $\frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}$;
4) $\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}$;
5)* $\lg \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}$;
6)* $\lg \frac{\sin\varphi}{1 - \sin\varphi}$.

227. Объясните, как получена цепочка равенств:

1) $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)$;

2) $\sin\pi = \sin(-\pi) = \sin 3\pi = \sin(-3\pi)$.

228. 1) Сравните числовые значения:

а) $\sin\frac{\pi}{6}$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Какие предположения о результате изменения знака аргумента синуса и косинуса можно высказать?

! Контрольные вопросы и задания

1. Что называется синусом и косинусом любого угла φ?
2. Выполнив необходимые построения и измерения, найдите косинус и синус угла $150°$.
3. В какой четверти находится угол: $0{,}8\pi$, $1{,}3\pi$, $1{,}7\pi$? Какие знаки имеют его синус и косинус?

15. Тангенс и котангенс любого угла

В курсе геометрии вы познакомились с тангенсом острого угла, равным частному синуса и косинуса этого угла:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

С помощью этого равенства можно определить тангенс любого угла φ, косинус которого отличен от нуля.

Тангенсом угла называется частное синуса и косинуса этого угла.

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\varphi}}$$

Для углов, косинусы которых равны нулю, т. е. углов вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, тангенс не существует.

Косинус и синус любого угла изображаются как абсцисса и ордината соответствующей точки единичной окружности. Единичная окружность поможет и при изображении тангенса.

На рисунке 73 к единичной окружности в точке P_0 проведена касательная; P_φ — конечная точка поворота на угол φ; C — точка пересечения касательной и прямой OP_φ.

Ордината точки C равна тангенсу угла φ.

▼ Докажем это. Заметим сначала, что $\operatorname{tg}\varphi$ и ордината точки C одинаковы по знаку. Так, если P_φ — точка I или III координатной четверти, то $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ или оба положительны (рис. 73, *а*), или оба отрицательны (рис. 73, *в*). Значит, их частное $\operatorname{tg}\varphi$ положительно. Точка C в этих случаях расположена в верхней полуплоскости и, следовательно, имеет положительную ординату.

Если же точка P_φ находится во II или в IV координатной четверти, то знаки $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ различны (рис. 73, *б, г*), следовательно, $\operatorname{tg}\varphi$ отрицателен. Точка C при этом находится в нижней полуплоскости и имеет отрицательную ординату.

Остаётся показать, что $|P_0C| = |\operatorname{tg}\varphi|$. Это равенство следует из подобия треугольников P_0OC и DOP_φ (рис. 73):

$$\frac{|P_0C|}{1} = \frac{|DP_\varphi|}{|OD|} = \frac{|\sin\varphi|}{|\cos\varphi|} = |\operatorname{tg}\varphi|.$$

Итак, утверждение доказано. △

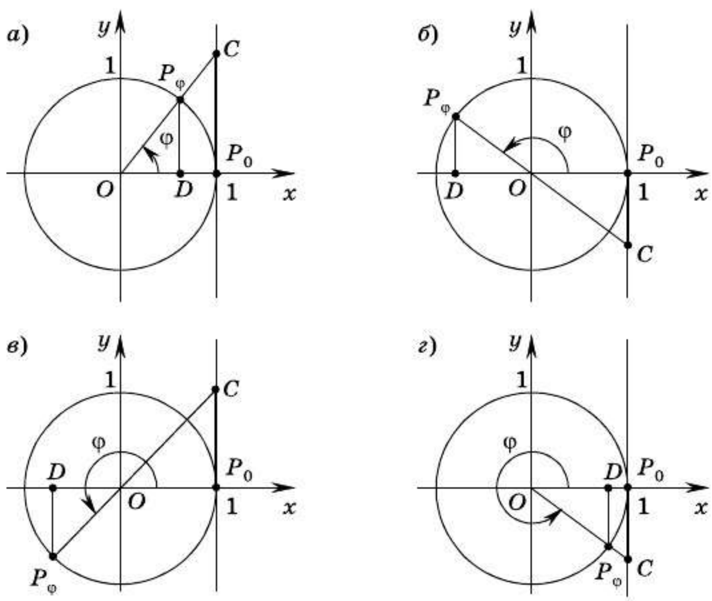


Рис. 73

Касательную, проведённую к единичной окружности в точке P_0, называют ***осью тангенсов***.

Наверное, поэтому математик Т. Финк в конце XVI века назвал отношение синуса к косинусу «тангенсом», что в переводе с латыни означает «касающийся».

Прямая OC проходит через начало координат, её уравнение, как вы знаете, $y = kx$.

При $x = 1$ получаем $y = k$, т. е. угловой коэффициент прямой $y = kx$ равен ординате точки C. Значит,

$$\boldsymbol{k = \operatorname{tg} \varphi.}$$

Угол φ, образованный в верхней полуплоскости прямой $y = kx$ и лучом Ox, называют *углом наклона прямой*. Такие же углы образуют с положительным направлением оси абсцисс все прямые $y = kx + b$:

угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ равен тангенсу её угла наклона.

В тригонометрии наряду с синусом, косинусом и тангенсом рассматривают *котангенс угла*.

Котангенсом угла называется частное косинуса и синуса этого угла.

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Это равенство позволяет определить котангенс любого угла, синус которого отличен от нуля, т. е.

$$\varphi \neq \pi n,\ n \text{ — любое целое число.}$$

Пример 1. Найти тангенс и котангенс угла 220°.

Решение. Построим единичную окружность с центром в начале координат и проведём ось тангенсов. Отметим на окружности с помощью транспортира точку P_{220°, $220^\circ = 360^\circ - 140^\circ$. Через точку P_{220° и начало координат проведём прямую — она пересечёт ось тангенсов в точке C (рис. 74). Ордината этой точки приближённо равна 0,84. Значит,

$$\operatorname{tg} 220^\circ \approx 0{,}84.$$

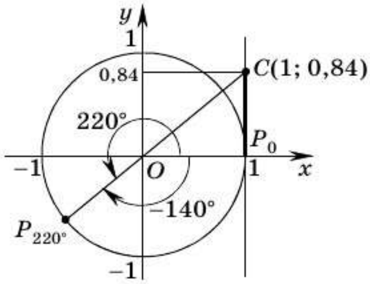


Рис. 74

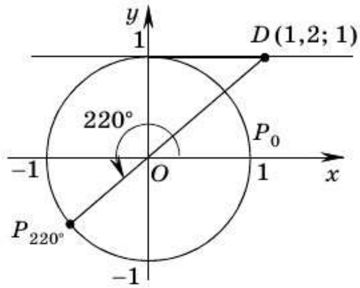


Рис. 75

Заметив, что

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

найдём:

$$\operatorname{ctg} 220^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 220^\circ} \approx \frac{1}{0{,}84} \approx 1{,}2.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 220^\circ \approx 0{,}84$, $\operatorname{ctg} 220^\circ \approx 1{,}2$.

Можно было для определения значения котангенса воспользоваться *осью котангенсов* (рис. 75). Абсцисса точки пересечения прямой, касающейся единичной окружности в точке (0; 1), с прямой OP_φ равна котангенсу угла φ.

Доказательство этого факта аналогично доказательству, проведённому для оси тангенсов.

Пример 2. Найти общий вид углов, тангенс которых равен $-1{,}2$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точку C с ординатой, равной $-1{,}2$, и проведём прямую OC. Прямая OC пересекает единичную окружность в точках P_{α° и P_{β° — концах одного и того же диаметра (рис. 76). Углы, соответствующие этим точкам, отличаются друг от друга на целое число полуоборотов, т. е. на $180^\circ n$ (n — целое число). С помощью транспортира находим, что угол

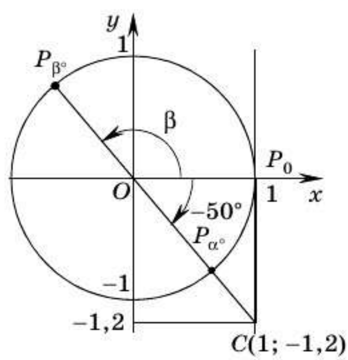


Рис. 76

$P_{\alpha^\circ}OP_0$ равен $-50°$. Значит, общий вид углов, тангенс которых равен $-1{,}2$, следующий: $-50° + 180°n$, n — целое число.

Ответ: $-50° + 180°n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

По синусу и косинусу углов 30°, 45° и 60° легко найти их тангенсы и котангенсы. Например,

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Перечисленные углы довольно часто встречаются в разных задачах, поэтому полезно запомнить значения тангенса и котангенса этих углов.

$\alpha°$	30°	45°	60°
φ рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Упражнения

229. Даны координаты точки P_α на единичной окружности. Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$:

1) $\left(-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$;
2) $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
3) $\left(\frac{12}{13};\ -\frac{5}{13}\right)$;
4) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

230. Определите знак выражения:

1) $\operatorname{tg} 148°$;
2) $\operatorname{ctg} 248°$;
3) $\operatorname{ctg} 348°$;
4) $\operatorname{tg} 548°$;
5) $\operatorname{tg} 230° \sin 130°$;
6) $\cos 285° \operatorname{ctg} 185°$;
7) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$;
8) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$;
9) $\operatorname{tg} 68° - \sin 68°$;
10) $\operatorname{tg} 125° + \sin 125°$;
11) $\operatorname{tg} 1{,}7\pi - \sin 1{,}7\pi$;
12) $\operatorname{tg} 1{,}2\pi + \sin 1{,}2\pi$.

231. В каких координатных четвертях синус и тангенс имеют:
1) одинаковые знаки; 2) разные знаки?

232. 1) В каких четвертях тангенс и котангенс:
а) положительны; б) отрицательны?
2)○ Могут ли тангенс и котангенс одного угла иметь разные знаки?

233. С помощью оси тангенсов найдите:
1) $\operatorname{tg} 72°$; 3) $\operatorname{tg} 126°$; 5)○ $\operatorname{ctg} 215°$;
2) $\operatorname{tg} 40°$; 4) $\operatorname{tg} 310°$; 6)○ $\operatorname{ctg} 165°$.

234.○ Найдите общий вид углов, тангенс которых равен:
1) 1,3; 2) 0,7; 3) –0,4; 4) –1,7.

235.● Для каких углов от 0° до 360°:
1) тангенс равен котангенсу;
2) тангенс противоположен котангенсу;
3) тангенс больше котангенса;
4) тангенс меньше котангенса?

236.● Докажите, что синус острого угла меньше тангенса того же угла.

237.○ С помощью единичной окружности определите, имеет ли смысл выражение:
1) $\sqrt{\operatorname{tg} 2}$; 2) $\lg \operatorname{tg} 4$; 3) $\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5}$; 4) $\lg \operatorname{tg} 6$.

238.● Докажите, что абсцисса точки пересечения прямой OP_φ с осью котангенсов равна $\operatorname{ctg} \varphi$.

239.○ Заполните таблицу.

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$						
tg φ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1		—				
ctg φ	—	$\sqrt{3}$							

240. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} \pi \cos \frac{\pi}{2}$;
2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;
3) $\cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;
4) $2 \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi$.

241. Проверьте справедливость равенства:

$$\cos 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - 1 = \operatorname{ctg} 60^\circ (1 + \sin^2 45^\circ).$$

242. Найдите все углы φ, при которых верно равенство:
1) $\operatorname{tg} \varphi = 0$; 2) $\operatorname{ctg} \varphi = 0$; 3) $\operatorname{tg} \varphi = 1$; 4) $\operatorname{tg} \varphi = -1$.

243. Найдите все углы φ из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых верно равенство:

1) $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{3}$;
3) $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) $\lg \operatorname{tg} \varphi = \lg \sin \varphi - \lg \cos \varphi$;
6) $\lg \operatorname{ctg} \varphi = \lg \cos \varphi - \lg \sin \varphi$.

244. Укажите все углы φ, для которых не имеет смысла выражение:

1) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$;
2) $\frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi}$;
3) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi - 1}$;
4) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}$;
5) $\lg \operatorname{tg} \varphi$;
6) $\lg \operatorname{ctg} \varphi$.

245. Запишите уравнение прямой, если известно, что она проходит:
1) через начало координат;
2) через точку с координатами $(0; 3)$ и её угол наклона равен:
а) 30°; б) 45°; в) 120°; г) 135°.

246. Что больше:

1) $\sin 1^\circ$ или $\sin 1$;
2) $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{tg} 2$;
3) $\sin 15^\circ$ или $\sin 15$;
4) $\cos 3$ или $\cos 4$?

! Контрольные вопросы и задания

1. Что называется тангенсом и котангенсом любого угла φ?

2. При каких значениях φ выражение $\operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \varphi$ не имеет смысла? Докажите, что равенство $\operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \varphi = 1$ верно при всех допустимых значениях φ.

3. С помощью оси тангенсов найдите $\operatorname{tg} (-40^\circ)$.

16. Простейшие тригонометрические уравнения

В предыдущих пунктах вы уже находили угол по значению его синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Уравнения вида
$\sin\varphi = a$, $\cos\varphi = a$, $\operatorname{tg}\varphi = a$, $\operatorname{ctg}\varphi = a$
называются простейшими
тригонометрическими уравнениями.

В дальнейшем будут встречаться различные тригонометрические уравнения, однако все они в процессе решения будут сводиться к простейшим. Естественно поэтому сначала выяснить, как решаются простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение $\sin\varphi = a$

Прямая $y = a$ при $-1 < a < 1$ пересекает окружность в двух точках P_φ и $P_{\pi-\varphi}$ (рис. 77). *Число* φ, *принадлежащее промежутку* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *синус которого равен a, называют* ***арксинусом a***. Обозначение: $\arcsin a$ («arc» означает «дуга», а целиком «$\arcsin a$» можно перевести как «угол, синус которого равен a»).

Из рисунка 77 видно, что уравнение $\sin\varphi = a$ при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней.

$\boldsymbol{\sin\varphi = a}$:
1) $\boldsymbol{\varphi = \arcsin a + 2\pi n}$;
2) $\boldsymbol{\varphi = \pi - \arcsin a + 2\pi n}$,
n — любое целое число.

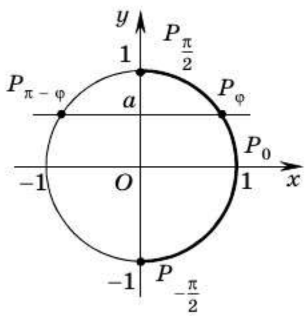


Рис. 77

Выражение для второй серии корней можно несколько упростить, записав:

$$\varphi = -\arcsin a + (2n + 1)\pi.$$

Решение каждого из уравнений $\sin\varphi = 1$ и $\sin\varphi = -1$, как вы уже видели, записывается в виде одной серии корней.

$$\sin\varphi = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin\varphi = -1,\ \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Уравнение $\cos\varphi = a$

В данном случае надо рассмотреть прямую, перпендикулярную оси абсцисс, которая при $-1 < a < 1$ пересекает окружность в двух точках P_{φ} и $P_{-\varphi}$ (рис. 78). Как и в предыдущем случае, для числа φ вводят специальное название «арккосинус a» — *корень уравнения* $\cos x = a$, *принадлежащий промежутку* $[0; \pi]$ (на рис. 78 соответствующая дуга единичной окружности выделена); обозначают арккосинус числа a: $\arccos a$ (угол, косинус которого равен a).

Из рисунка видно, что уравнение $\cos\varphi = a$ при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней.

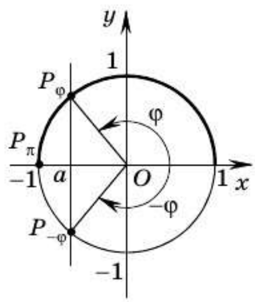


Рис. 78

$$\cos\varphi = a:$$
$$\varphi_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\varphi_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Как и в случае синуса, решение каждого из уравнений $\cos\varphi = 1$ и $\cos\varphi = -1$ записывается в виде одной серии корней.

$$\cos\varphi = 1,\ \varphi = 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$\cos\varphi = -1,\ \varphi = \pi(2n + 1),\ n \in Z.$$

Отметим, что если число a больше 1 или меньше -1, то ни уравнение $\sin\varphi = a$, ни уравнение $\cos\varphi = a$ корней не имеют.

Уравнения $\operatorname{tg} \varphi = a$ и $\operatorname{ctg} \varphi = a$

Решения уравнений $\operatorname{tg} \varphi = a$ и $\operatorname{ctg} \varphi = a$ проиллюстрируем с помощью осей тангенсов и котангенсов (рис. 79).

Ясно, что число a в этих уравнениях может быть любым.

$$\operatorname{tg} \varphi = a,$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z,$$
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2},$$

$\operatorname{arctg} a$ — угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = a,$$
$$\varphi = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z,$$
$$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi,$$

$\operatorname{arcctg} a$ — угол из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a,

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a.$$

Пример 1. Найти корни уравнения $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

Решение. Заменим данное уравнение простейшим уравнением $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Его корни:

1) $x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$;

2) $x = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$.

Из рисунка 80 видно, что

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

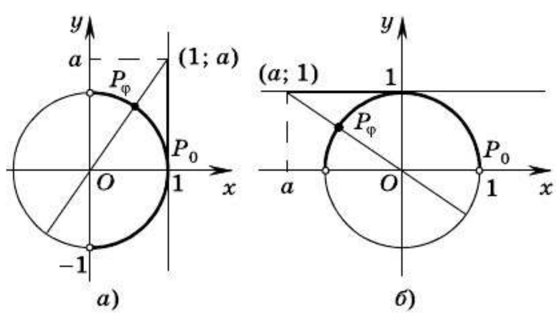


Рис. 79

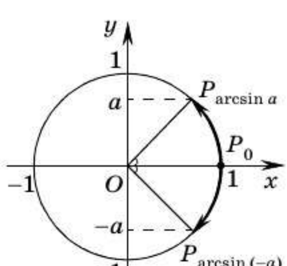


Рис. 80

С учётом этого можно записать:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Продолжая решение уравнения, получим:

1) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Будем подставлять в эти две серии решений целые значения n и определять, принадлежат ли получаемые при этом решения промежутку $[0; 2\pi]$.

При $n = 1$ имеем

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$$

Другие решения этой серии выходят за границы промежутка, поскольку отстоят от x_1 не меньше, чем на 2π, а границы промежутка отличаются от x_1 меньше, чем на 2π.

Аналогично получаем единственное решение второй серии, входящее в указанный промежуток: при $n = 0$ получим

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Примечание. Получив простейшее уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, можно было изобразить его решения на единичной окружности (рис. 81) и сразу записать ответ.

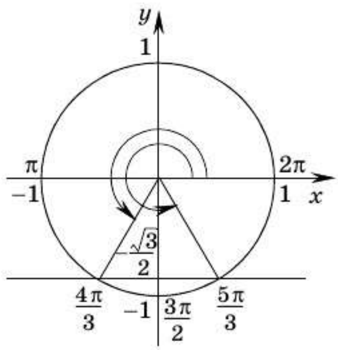


Рис. 81

Пример 2. Найти значение $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)$.

Решение. Для любого a из промежутка $[0; \pi]$

$$\arccos(\cos a) = a.$$

Поскольку $0 \leqslant \frac{3\pi}{5} \leqslant \pi$, $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{5}$.

Пример 3. Решить уравнение $7\,\mathrm{tg}^2\,x - \mathrm{tg}\,x - 6 = 0$.

Решение. Обозначим $\mathrm{tg}\,x$ буквой y, тогда данное уравнение примет вид

$$7y^2 - y - 6 = 0.$$

Его корни: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{6}{7}$. Возвращаясь к переменной x, получим:

1) $\mathrm{tg}\,x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, n — любое целое число;

2) $\mathrm{tg}\,x = -\frac{6}{7}$, $x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{6}{7}\right) + \pi n$, n — любое целое число.

Заметим, что $\mathrm{arctg}\left(-\frac{6}{7}\right) = -\mathrm{arctg}\,\frac{6}{7}$ (рис. 82). Поэтому вторую серию решений можно записать так:

$$x = \pi n - \mathrm{arctg}\,\frac{6}{7},\ n \text{ — любое целое число.}$$

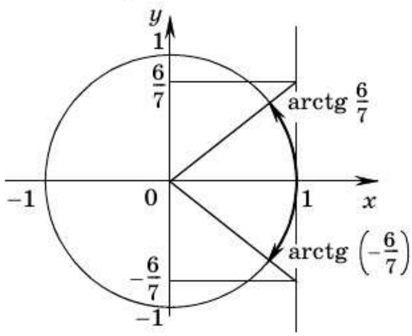


Рис. 82

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\pi n - \mathrm{arctg}\,\frac{6}{7}$, n — любое целое число.

Упражнения

247. Используя таблицу значений синусов и косинусов, полученную при выполнении задания 239, заполните таблицу.

α	-1	1	0	$0{,}5$	$-0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arcsin\alpha$									
$\arccos\alpha$									

248. Используя таблицу значений тангенсов и котангенсов, полученную при выполнении задания 247, заполните таблицу.

α	-1	1	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
arctg α							
arcctg α							

249. Постройте угол, равный:

1) $\arcsin \frac{4}{5}$;
2) $\arccos \left(-\frac{3}{4}\right)$;
3) $\operatorname{arctg} 2$;
4) $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{4}\right)$.

250.° Используя графическую иллюстрацию, определите знак разности:

1) $\arcsin \frac{3}{4} - \arcsin 1$;
2) $\arccos \frac{3}{4} - \arccos 1$;
3) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 4$;
4) $\operatorname{arcctg} 3 - \operatorname{arcctg} 1{,}5$.

251.• В каких границах заключён угол:

1) $\frac{1}{2} \arcsin p$;
2) $2 \arccos p$;
3) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} p$;
4) $\pi + \operatorname{arcctg} p$?

252. Вычислите:

1) $\arcsin \frac{1}{2}$;
2) $\operatorname{arctg} (-1)$;
3) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$;
5) $\arccos 0$;
6) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\arcsin 1$;
8) $\operatorname{arcctg} 0$;
9) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

253.° Найдите значение выражения:

1) $\arccos \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$;
2) $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$;
3) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 1)$;
4) $\operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} 1)$;
5) $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
6) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

254. Найдите значение выражения:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\cos(\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arcctg} 1)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

255. Может ли: 1) $\arcsin t$; 2) $\arccos t$; 3) $\operatorname{arctg} t$; 4) $\operatorname{arcctg} t$ принимать значения:

а) 0; б) -1; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\sqrt{2}$; д) 1; е) $-\frac{\pi}{6}$; ж) π; з) $-\frac{\pi}{2}$; и) $\frac{\pi}{2}$; к) -2π; л) $3\sqrt{5}$; м) $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

256. Сравните α и β, если:

1) $5\alpha+\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $10\beta+\frac{7\pi}{4}=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $3\alpha-\frac{\pi}{3}=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; $3\beta-\frac{4\pi}{3}=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

257. Для каких значений a имеет смысл выражение:

1) $\arcsin a$;
2) $\arccos a$;
3) $\operatorname{arctg} a$;
4) $\operatorname{arcctg} a$?

258. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

1) $\sin x=0$;
2) $\cos x-1=0$;
3) $3\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0$;
4) $\operatorname{ctg}^2 x-3=0$;
5) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$;
6) $\operatorname{ctg}(x-\pi)-1=0$;
7) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{2}=0$;
8) $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$.

259. Верно ли утверждение, что при любом значении a:

1) $\arcsin(\sin a)=a$;
2) $\arccos(\cos a)=a$;
3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a)=a$;
4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} a)=a$?

Если вы считаете, что утверждение не верно, приведите опровергающий пример.

260. Верно ли утверждение: «$\arcsin(\cos a) = \frac{\pi}{2} - a$ для любого значения a»?

261. Что означают слова *арка*, *аркада*? Существует ли какая-нибудь связь этих слов со значением приставки «арк» в словах *«арксинус»*, *«арккосинус»*?

262. Решите уравнение:
1) $4\sin^2 x + 5\sin x + 1 = 0$; 2) $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$.

263. 1) Объясните цепочку равенств:
$$\frac{\pi}{3} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
2) Составьте аналогичные цепочки равенств для чисел $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.

2. Вычислите $\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:
а) $\sin x - 0{,}5 = 0$; б) $\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

17. Формулы приведения

Уже в древности при выполнении различных расчётов применялись таблицы, в которых были приведены значения синусов, косинусов и тангенсов острых углов. Чтобы пользоваться такими таблицами, нужно было уметь приводить тригонометрические функции к углам от $0°$ до $90°$ $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. выражать значения тригонометрических функций любых углов через значения тригонометрических функций углов от $0°$ до $90°$.

Рассмотрим сначала, как тригонометрические функции любого угла приводятся к функциям углов от $0°$ до $360°$ (от 0 до 2π).

Поскольку повороты на углы, отличающиеся друг от друга на $360°n$ (на $2\pi n$), где n — любое целое число, имеют одну и ту же конечную точку, то уменьшение или увеличение аргумента тригонометрической функции на 2π не изменяет её значения.

$$\mathbf{\sin(\varphi \pm 2\pi) = \sin\varphi}$$
$$\mathbf{\cos(\varphi \pm 2\pi) = \cos\varphi}$$
$$\mathbf{\operatorname{tg}(\varphi \pm 2\pi) = \operatorname{tg}\varphi}$$
$$\mathbf{\operatorname{ctg}(\varphi \pm 2\pi) = \operatorname{ctg}\varphi}$$

Пример 1. Привести к углу от $0°$ до $360°$ (от 0 до 2π):

$$\cos 2000°,\ \sin\left(-\frac{59\pi}{6}\right).$$

Решение. $\cos 2000° = \cos(2000° - 360° \cdot 5) = \cos 200°$;

$$\sin\left(-\frac{59\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi \cdot 5\right) = \sin\frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\cos 200°$, $\sin\frac{\pi}{6}$.

Получить следующие три формулы приведения нам помогут рисунки.

На рисунке 83 точки P_φ, $P_{-\varphi}$, $P_{\pi-\varphi}$ и $P_{\pi+\varphi}$ — конечные точки поворотов на углы φ, $-\varphi$, $\pi - \varphi$ и $\pi + \varphi$. Точки P_φ и $P_{-\varphi}$ симметричны относительно оси абсцисс, значит, абсциссы этих точек равны, а ординаты противоположны.

$$\mathbf{\cos(-\varphi) = \cos\varphi}$$
$$\mathbf{\sin(-\varphi) = -\sin\varphi}$$

Точки $P_{\pi-\varphi}$ и $P_{-\varphi}$, а также точки P_φ и $P_{\pi+\varphi}$ являются концами соответствующих диаметров единичной окружности и, следовательно, симметричны относительно её центра — начала координат. Абсциссы этих точек противоположны, противоположны и их ординаты.

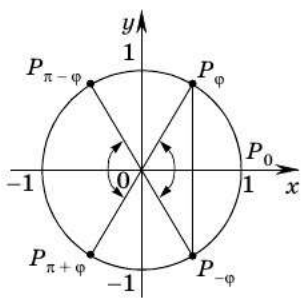


Рис. 83

$$\cos(\pi - \varphi) = -\cos(-\varphi) = -\cos\varphi$$
$$\cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi$$
$$\sin(\pi - \varphi) = -\sin(-\varphi) = \sin\varphi$$
$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi$$

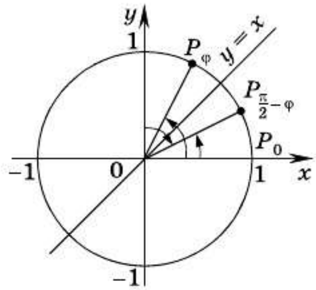


Рис. 84

Эти формулы позволяют привести к углам от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (от 0° до 90°) синус и косинус любых углов.

Точки P_φ и $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ (рис. 84) — конечные точки поворота на углы φ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Эти точки симметричны относительно прямой $y = x$. С симметрией относительно этой прямой вы уже встречались, рассматривая графики взаимно-обратных функций.

Абсцисса точки $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ равна ординате точки P_φ, а ордината точки $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ равна абсциссе точки P_φ.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

Полученные формулы приведения позволяют понять происхождение терминов «косинус» и «котангенс». В формуле $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$ аргумент косинуса дополняет аргумент синуса до $\frac{\pi}{2}$: $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \varphi = \frac{\pi}{2}$. От перестановки слов *sinus complementi* (синус дополнения) и сокращения одного из них образовался термин «косинус». Термин «котангенс» стали применять по аналогии с «косинусом».

Для приведения к углу φ синусов и косинусов углов $\frac{\pi}{2} + \varphi$, $\frac{3\pi}{2} - \varphi$ и $\frac{3\pi}{2} + \varphi$ можно использовать симметрии точки $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ с точкой $P_{\frac{\pi}{2}+\varphi}$ относительно оси ординат, с точкой $P_{\frac{3\pi}{2}-\varphi}$ относительно начала координат и с точкой $P_{\frac{3\pi}{2}+\varphi}$ относительно оси абсцисс (рис. 85).

Но можно применить и уже полученные формулы приведения. Для этого достаточно заметить, что

$$\frac{\pi}{2}+\varphi=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\frac{3\pi}{2}-\varphi=\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\frac{3\pi}{2}+\varphi=2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

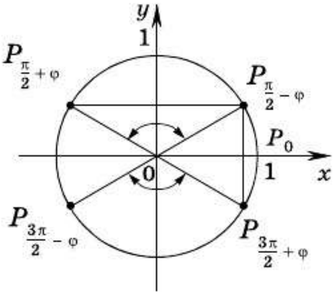


Рис. 85

Формулы приведения для тангенса и котангенса легко получить, рассматривая их как частные синуса и косинуса, например:

$$\operatorname{tg}(\pi-\varphi)=\frac{\sin(\pi-\varphi)}{\cos(\pi-\varphi)}=\frac{\sin\varphi}{-\cos\varphi}=-\operatorname{tg}\varphi.$$

α	$\varphi+2\pi n$	$-\varphi$	$\pi-\varphi$	$\pi+\varphi$
$\sin\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$
$\cos\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$
α	$\frac{\pi}{2}-\varphi$	$\frac{\pi}{2}+\varphi$	$\frac{3\pi}{2}-\varphi$	$\frac{3\pi}{2}+\varphi$
$\sin\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\cos\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$

Формулы приведения являются тождествами, т. е. они верны для любых допустимых значений φ. Анализируя полученную таблицу, можно заметить, что:

1) *знак в правой части формулы совпадает со знаком приводимой функции в соответствующей четверти, если считать* φ *острым углом*;

2) *название меняют только функции углов*

$$\frac{\pi}{2} \pm \varphi \text{ и } \frac{3\pi}{2} \pm \varphi \; (90^\circ \pm \alpha^\circ \text{ и } 270^\circ \pm \alpha^\circ).$$

Пример 2. Привести $\cos 289^\circ$ к тригонометрической функции острого угла.

Решение. Можно рассуждать следующим образом:

1) 289° — угол IV четверти, в которой косинус положителен, значит, в правой части формулы нет знака «–»;

2) $289^\circ = 270^\circ + 19^\circ$ — название меняется.

Таким образом, $\cos 289^\circ = \cos (270^\circ + 19^\circ) = \sin 19^\circ$.

Ответ: $\cos 289^\circ = \sin 19^\circ$.

Примечание. Можно было представить 289° как $360^\circ - 71^\circ$, тогда название не изменяется и

$$\cos 289^\circ = \cos (360^\circ - 71^\circ) = \cos 71^\circ.$$

Понятно, что $\cos 71^\circ = \cos (90^\circ - 19^\circ) = \sin 19^\circ$.

Вычислять значения тригонометрических функций можно с помощью таблиц или инженерных калькуляторов. На инженерном калькуляторе из Windows, о котором упоминалось в связи с вычислением степеней и логарифмов, нет нужды использовать формулы приведения для вычисления значений тригонометрических функций — это делает сам калькулятор (рис. 86).

Пример 3. С помощью калькулятора найти $\sin 43{,}5$ с точностью до сотых.

Решение. Чтобы найти $\sin 43{,}5$, нужно сначала перейти в режим работы с радианами, для этого «щёлкнуть» мышью на указателе Радианы (*Rad*), набрать 43,5,

Рис. 86

«щёлкнуть» клавишу sin и прочитать в окошке искомое значение

$$-0{,}46381551598382738881409597093642 \text{ (см. рис. 86)},$$
$$\sin 43{,}5 \approx -0{,}4638155159838 \approx -0{,}46$$

с точностью до сотых.

Ответ: $\sin 43{,}5 \approx -0{,}46$.

Пример 4. Вычислить с помощью калькулятора $\operatorname{ctg} 48757^\circ$ с точностью до тысячных.

Решение. Чтобы перевести калькулятор в режим работы с градусной мерой углов, следует «щёлкнуть» на указателе Градусы (*Deg*). Вводим число 48757, затем «щёлкаем» клавишу tg (или tan — иное обозначение тангенса) и на «$\frac{1}{x}$» — так как специальной клавиши для котангенса нет, мы находим его как величину, обратную тангенсу:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

На индикаторе появится число

$$-2{,}3558523658237528339395866623439.$$

Ответ: $\operatorname{ctg} 48757^\circ \approx -2{,}356$.

Если при вычислении окажется, что тангенс не существует, значит, котангенс равен нулю, а если тангенс окажется равным нулю, то не существует котангенс.

Пример 5. Вычислить с помощью калькулятора $\arcsin 0{,}7$.

Решение. Помогает инженерный калькулятор и в нахождении углов. Так, чтобы найти $\arcsin 0{,}7$, нужно ввести $0{,}7$, «щёлкнуть» на указателе *Inv* (от английского слова *inverse* — обратный) и на клавише sin. Если калькулятор находился в режиме работы с градусной мерой, то он покажет $44{,}42700400081$, если в режиме работы с радианами, то в окошке увидим число $0{,}7753974966108$.

Ответ: $\arcsin 0{,}7 \approx 44{,}42700400081^\circ$, $\arcsin 0{,}7 \approx 0{,}7753974966108$. (Трудно представить, что вам когда-нибудь потребуется вычислять углы с такой высокой точностью.)

С развитием электронно-вычислительной техники, позволяющей быстро и точно получать значения тригонометрических функций углов, заданных как в градусной, так и в радианной мере, вычисления значений тригонометрических функций практически перестали выполняться вручную. Однако в преобразованиях тригонометрических выражений формулы приведения используются довольно часто.

Упражнения

264. Приведите к тригонометрической функции острого угла:

1) а) $\sin 152^\circ$; в) $\sin 242^\circ$; д) $\sin 312^\circ$;
б) $\cos 124^\circ$; г) $\cos 196^\circ$; е) $\cos 326^\circ$;
2) а) $\sin 175^\circ$; в) $\sin 221^\circ$; д) $\sin 290^\circ$;
б) $\cos 166^\circ$; г) $\cos 235^\circ$; е) $\cos 306^\circ$;
3) а) $\mathrm{tg}\, 111^\circ$; в) $\mathrm{tg}\, 187^\circ$; д) $\mathrm{tg}\, 286^\circ$;
б) $\mathrm{ctg}\, 163^\circ$; г) $\mathrm{ctg}\, 215^\circ$; е) $\mathrm{ctg}\, 319^\circ$.

265. Приведите к углам от 0° до 45°:

1) а) $\sin 72^\circ$; б) $\cos 71^\circ$; в) $\mathrm{tg}\, 65^\circ$;
2) а) $\sin 175^\circ$; б) $\cos 155^\circ$; в) $\mathrm{tg}\, 102^\circ$;
3) а) $\sin 285^\circ$; б) $\cos 273^\circ$; в) $\mathrm{tg}\, 250^\circ$;
4) а) $\sin(-355^\circ)$; б) $\cos(-451^\circ)$; в) $\mathrm{tg}(-317^\circ)$.

266. Упростите выражение:

1) $\sin 146^\circ + \sin 304^\circ + \sin(-56^\circ) + \cos(-34^\circ)$;
2) $\cos 220^\circ + \cos 320^\circ - \mathrm{tg}\, 110^\circ + \mathrm{ctg}\, 380^\circ$.

267. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\cos(\pi - x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi + x)}$;

2) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}{\cos(\pi + x)\operatorname{tg}(-x)}$;

3) $\dfrac{\sin(\pi - \varphi)\cos(3\pi + \varphi)}{\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \varphi\right)}$;

4) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

268. Найдите с точностью до тысячных значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла:

1) а) $120°$; б) $-225°$; в) $300°$;
2) а) $-150°$; б) $210°$; в) $315°$;
3) а) $\dfrac{7\pi}{3}$; б) $\dfrac{5\pi}{4}$; в) $-\dfrac{43\pi}{6}$.

269. Вычислите с точностью до тысячных:

1) $3 \arccos 0{,}06 : \arcsin(-0{,}316)$;
2) $\arccos(-0{,}5213) - \operatorname{arctg} 3{,}148$;
3) $\arcsin 0{,}87 + \operatorname{arctg}(-57)$;
4) $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$.

270. Догадайтесь, как находить на калькуляторе значения арккотангенсов.

271. Найдите приближённое значение $\operatorname{arcctg} a$, если a равно:

1) 15; 3) $-26\,589$; 5) $\operatorname{tg}\sqrt{2}$;
2) $-0{,}000547$; 4) $-\dfrac{\pi}{3}$; 6) $\operatorname{tg}(-46°)$.

272. Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$:

1) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$;
3) $\operatorname{tg}(\pi + x) = 1$;
2) $2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$;
4) $3\operatorname{ctg}(2\pi - x) = \sqrt{3}$.

273. Решите уравнение:

1) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$;
2) $\cos(2\pi - x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$;
3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}$;
4) $3\operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3} = 0$.

274. Найдите значение выражения:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{7}{9}\pi\right)$;
2) $\arccos\left(\cos\frac{24\pi}{7}\right)$;
3) $\arccos(\sin 6)$;
4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10)$;
5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 10)$;
6) $\arcsin(\cos 5)$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Какие координаты имеет точка B, симметричная точке $A(m; n)$ относительно:
а) оси абсцисс; в) начала координат;
б) оси ординат; г) прямой $y = x$?

2. Докажите, что $\sin(270° + \alpha°) = -\cos\alpha°$.

3. Найдите: а) $\sin 855°$; б) $\operatorname{tg}\frac{34\pi}{3}$.

18. Свойства и график функции $y = \sin x$

Вы познакомились с некоторыми свойствами функции $y = \sin\varphi$, аргумент φ которой может принимать любые значения. Эти свойства удобно использовать при построении графика функции $y = \sin x$ (аргумент функции, как вы знаете, обычно обозначают буквой x).

Построим сначала график функции $y = \sin x$ на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{для значений } x \text{ от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. На рисунке 87 пока-

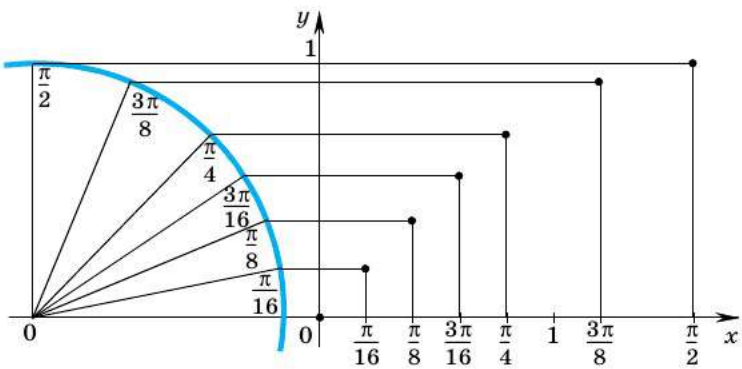


Рис. 87

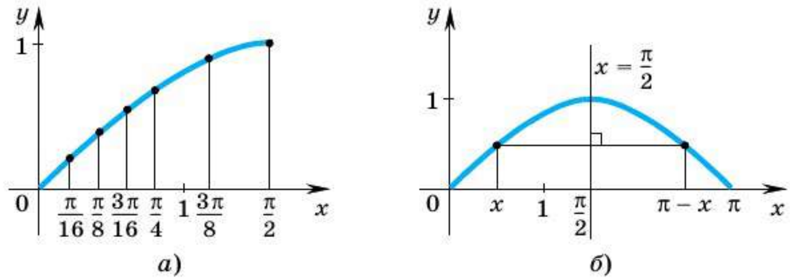


Рис. 88

зано, как можно получать точки графика функции $y = \sin x$ с помощью единичной окружности.

Соединив точки плавной линией, получим график функции $y = \sin x$ на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 88, *а*).

График функции $y = \sin x$ на других промежутках получим из построенной части графика.

Формула $\sin(\pi - x) = \sin x$ позволяет, используя симметрию графика относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 88, *б*), построить его на промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π.

Формула $\sin(-x) = -\sin x$ позволяет получить график функции $y = \sin x$ на промежутке от $-\pi$ до 0, используя обычный для построения графиков нечётных функций приём — симметрию относительно начала координат (рис. 89).

Формула $\sin(2\pi + x) = \sin x$ показывает, что значения функции $y = \sin x$ через каждые 2π повторяются, т. е. для любого значения x

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi).$$

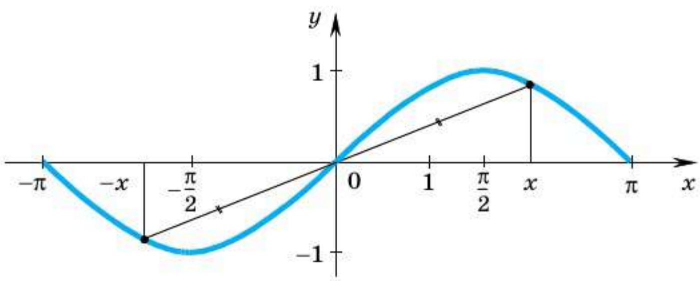


Рис. 89

Повторяющиеся события или явления в окружающем нас мире встречаются довольно часто: восход и заход солнца, бой часов на Спасской башне Московского Кремля, колебание маятника настенных старинных часов. И в математике вы встречались с бесконечным повторением группы цифр в дробной части десятичной дроби, например при делении 4 на 33 получается бесконечная десятичная дробь 0,1212121212... . Такие дроби называют *периодическими*. Этот же термин применяют и к функциям, значения которых повторяются.

Положительное число T называется ***периодом*** функции $y = f(x)$, если для любого значения x из её области определения:

1) $x - T$ и $x + T$ тоже входят в область определения функции;

2) $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Функции, имеющие период, называют ***периодическими***.

Периодичность функции $y = \sin x$ позволяет получить её график на промежутках от π до 3π, от -3π до $-\pi$, от 3π до 5π, от -5π до -3π и т. д. с помощью сдвига построенной части графика вдоль оси абсцисс вправо и влево на 2π, 4π и т. д. (рис. 90).

Примечание. В качестве периода функции $y = \sin x$ можно было бы взять 4π, 6π и т. д. Число 2π является наименьшим из её периодов. В этом легко убедиться, найдя расстояние между двумя соседними точками графика с ординатами, равными 1. Например, $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi$.

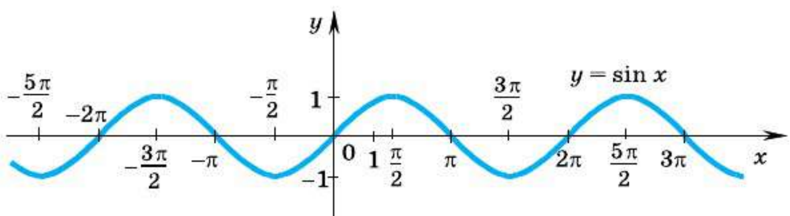


Рис. 90

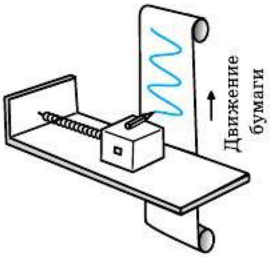


Рис. 91

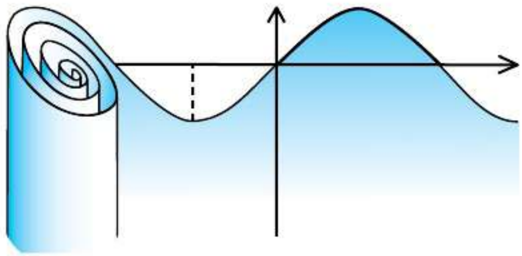


Рис. 92

Полученная кривая называется ***синусоидой***. Это первый график тригонометрических функций, который был опубликован уже в 30-х годах XVII в.

Синусоида — один из самых популярных графиков в физике. С ней непосредственно связано практически любое колебание. На рисунке 91 вы видите, что физический маятник на движущейся с постоянной скоростью бумажной ленте вычерчивает синусоиду.

Синусоиду образует и край срезанного наискось рулона бумаги (рис. 92).

Поверхность волн, как показано на рисунке 93, иногда напоминает синусоиду. Наверное, поэтому часть синусоиды длиной, равной периоду (например, на промежутке от 0 до 2π), называют волной синусоиды.

Основные свойства функции $y = \sin x$

1. Аргумент функции может принимать любые значения.

2. Функция принимает любые значения от -1 до 1.

3. Функция $y = \sin x$ нечётная, так как для любого значения x выполняется условие $\sin(-x) = -\sin x$.

График функции $y = \sin x$ симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = \sin x$ периодическая, её наименьшим периодом является число 2π.

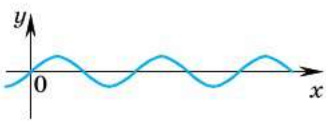


Рис. 93

5. а) Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где n — любое целое число.

Например, при $n = 0$ получаем промежуток возрастания $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а при $n = 2$ — промежуток $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

б) Функция убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где n — любое целое число. Так, при $n = 0$ получаем промежуток $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а при $n = -1$ — промежуток $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

6. а) Функция принимает своё наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — любое целое число.

б) Функция принимает своё наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — любое целое число.

7. Функция $y = \sin x$ принимает значение, равное нулю, при $x = \pi n$, где n — любое целое число.

Пример 1. Расположить в порядке возрастания $\sin 225°$, $\sin 310°$ и $\cos 118°$.

Решение. Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, следовательно, большему острому углу соответствует больший синус. Выразим данные в условии выражения через синусы острых углов:

$$\sin 225° = \sin (180° + 45°) = -\sin 45°,$$

$$\sin 310° = \sin (360° - 50°) = -\sin 50°,$$

$$\cos 118° = \cos (90° + 28°) = -\sin 28°.$$

Так как в первой четверти функция $y = \sin x$ возрастает, имеем: $\sin 28° < \sin 45° < \sin 50°$. Значит,

$$-\sin 50° < -\sin 45° < -\sin 28°.$$

Ответ: $\sin 310°$, $\sin 225°$, $\cos 118°$.

Пример 2. Доказать, что число π является периодом функции $y = \sin x \cdot \cos x$.

Доказательство. Поскольку аргумент x этой функции может принимать любые значения, нужно доказать, что при всех значениях x

$$\sin (x - \pi) \cos (x - \pi) = \sin x \cos x = \sin (x + \pi) \cos (x + \pi).$$

Используя формулы приведения, получаем:

$$\sin (x - \pi) \cos (x - \pi) = -\sin (\pi - x) \cos (\pi - x) =$$
$$= -\sin x (-\cos x) = \sin x \cos x;$$

$$\sin (x + \pi) \cos (x + \pi) = -\sin x (-\cos x) = \sin x \cos x,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

275. Воспользуйтесь графиком функции $y = \sin x$ для выполнения следующих заданий.

1) Можно ли по графику определить период функции? Является ли число периодом данной функции: π, 2π, 3π, 4π?

2) Как по графику определить чётность функции?

3) Найдите точки, принадлежащие одновременно и промежуткам возрастания, и промежуткам убывания функции.

4) Назовите наибольшие и наименьшие значения функции.

5) Назовите корни уравнения:

$$\sin x = 0; \ \sin x = 1; \ \sin x = -1.$$

6) Найдите значение: $\sin 0$; $\sin \frac{\pi}{2}$; $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

276. Используя график функции $y = \sin x$, найдите приближённое значение:

1) $\sin 1$; 3) $\sin 0{,}5$; 5) $\sin \frac{\pi}{4}$; 7) $\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\sin 2$; 4) $\sin (-1)$; 6) $\sin \frac{\pi}{5}$; 8) $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

277. Используя график и свойства функции $y = \sin x$, сравните:

1) $\sin 160°$ и $\sin 170°$;
2) $\sin 230°$ и $\sin 300°$;
3) $\sin 1$ и $\sin 2$;
4) $\sin 5$ и $\sin 6$.

278. 1) Постройте график функции $y = \sin x$ и выделите цветным карандашом те его точки, ординаты которых:

а) положительны;
б) отрицательны.

2) На каких промежутках функция $y = \sin x$ принимает положительные и на каких — отрицательные значения?

279. 1) Постройте одну волну синусоиды $y = \sin x$ на промежутке от 0 до 2π, взяв за единицу 2,5 см. Выделите карандашами разных цветов точки графика, ординаты которых:

а) равны: $0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) больше: $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) меньше: $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Запишите абсциссы выделенных точек.

280. Решите неравенство:

1) $\sin x < 1$;
2) $\sin x > -1$;
3) $\sin x > 0$;
4) $\sin x < 0$;
5) $\sin x > \sqrt{2}$;
6) $\sin x < -\sqrt{3}$.

281. 1) Постройте график функции $y = \sin x$ и проведите несколько его осей симметрии.

2) Напишите общий вид уравнения оси симметрии графика функции $y = \sin x$.

282. 1) Постройте график функции $y = \sin x$ и отметьте несколько центров симметрии этого графика.

2) Укажите общий вид абсцисс центров симметрии графика функции $y = \sin x$.

283. 1) Докажите, что число π является периодом функции:

а) $y = \sin^2 x$;
б) $y = |\sin x|$.

2) Изобразите схематически график этой функции.

284. Укажите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 2\sin x$;
2) $y = -\sin x$;
3) $y = \sin x + 0,5$;
4) $y = 3 - 2\sin x$;
5)* $y = \sin^2 x - \sin x + 4$;
6)* $y = \sin^2 x + 3\sin x - 2$.

285. Какие из следующих функций являются чётными, а какие — нечётными:

1) $y = \sin^3 x$;
2) $y = \sin^4 x$;
3) $y = \sin x^2$;
4) $y = \sin x^3$?

286. 1) Постройте в одной системе координат графики функций:

а) $y = \sin x$;
б) $y = 2\sin x$;
в) $y = \sin 2x$;
г) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2) С помощью каких преобразований графика функции $y = \sin x$ можно получить графики этих функций?

287. При каких значениях a функция

$$y = \sin^2 2x + 6\sin 2x + a$$

принимает только положительные значения?

288. 1) Постройте график функции:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sin|x|$; в) $y = |\sin|x||$.

2) Являются ли эти функции периодическими?

289. 1) Являются ли функции ***секанс*** ($y = \sec x$) и ***косеканс*** ($y = \operatorname{cosec} x$) чётными, если:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}?$$

2) Изобразите эскизы графиков этих функций.

! Контрольные вопросы и задания

1. Изобразите график функции $y = \sin x$ и перечислите основные свойства этой функции.

2. Сравните $\sin 305°$ и $\sin 215°$.

3. По графику функции $y = \sin x$ найдите:

$$\sin(-0,5),\ \sin 1,5 \text{ и } \sin 2,5.$$

19. Свойства и график функции $y = \cos x$

Задачу построения графика функции $y = \cos x$ можно свести к построению графика функции $y = \sin x$. Действительно, поскольку $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, график функции $y = \cos x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$ сдвигом последнего вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 94).

Полученный график является графиком функции $y = \cos x$ (рис. 95) и называется ***косинусоидой***.

Основные свойства функции $y = \cos x$

1. Аргумент функции может принимать любые значения.
2. Функция принимает любые значения от -1 до 1.
3. Функция $y = \cos x$ чётная, так как для любого значения x выполняется равенство $\cos(-x) = \cos x$.

График функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси ординат.

4. Функция $y = \cos x$ периодическая. Её наименьшим периодом является число 2π.
5. а) Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, где n — любое целое число. Например, при $n = 0$ получаем промежуток возрастания $[-\pi; 0]$, а при $n = 1$ — промежуток $[\pi; 2\pi]$.

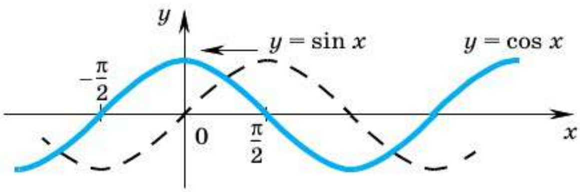


Рис. 94

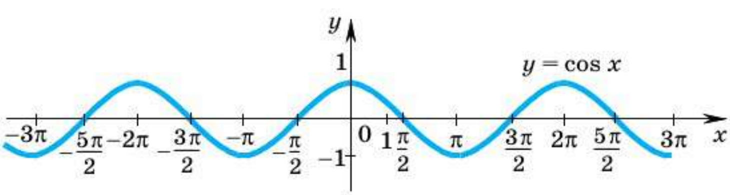


Рис. 95

б) Функция убывает на промежутках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, где n — любое целое число. Так, при $n = 0$ получаем промежуток $[0;\ \pi]$, а при $n = -1$ — промежуток $[-2\pi;\ -\pi]$.

6. а) Функция принимает своё наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, где n — любое целое число.

б) Функция принимает своё наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, где n — любое целое число.

7. Функция $y = \cos x$ принимает значение, равное нулю, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число.

Пример 1. Сравнить значения $\cos\frac{2\pi}{3}$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

Решение. На промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $y = \cos x$ убывает. Приведём данные выражения к косинусам углов из этого промежутка:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3};$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}.$$

В силу убывания функции $y = \cos x$ на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\cos\frac{\pi}{4} > \cos\frac{\pi}{3},\ \text{отсюда}\ -\cos\frac{\pi}{4} < -\cos\frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\cos\frac{2\pi}{3} > \cos\frac{5\pi}{4}$.

Пример 2. Решить неравенство $2\cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{4}\right) < -1$.

Решение. Обозначим аргумент косинуса буквой x, т. е. $3\varphi - \frac{\pi}{4} = x$. Разделим обе части неравенства на 2:

$$\cos x < -\frac{1}{2}.$$

Отметим какую-нибудь часть графика функции $y = \cos x$, точки которой имеют ординаты, меньшие $-\frac{1}{2}$, и обозначим

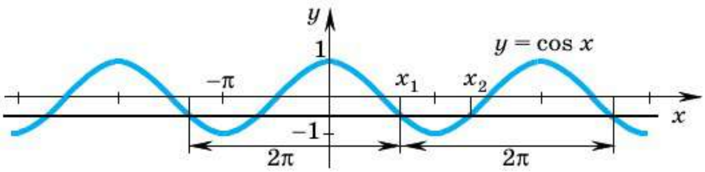


Рис. 96

границы промежутка абсцисс выбранной части графика как x_1 и x_2 (рис. 96). Тогда

$$\cos x_1 = \cos x_2 = -\frac{1}{2},\ x_1 = \frac{2\pi}{3},\ x_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Для всех x из промежутка $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ неравенство $\cos x < -\frac{1}{2}$ справедливо. Любой из промежутков, состоящих из решений неравенства $\cos x < -\frac{1}{2}$, отстоит от данного промежутка на целое число периодов: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$[1]. В виде такого двойного неравенства и записывают обычно множество всех решений неравенства $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Вернёмся теперь к переменной φ:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 3\varphi - \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n < 3\varphi < \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\frac{11\pi}{12} + 2\pi n < 3\varphi < \frac{19\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n < \varphi < \frac{19\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

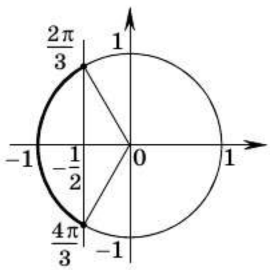


Рис. 97

О т в е т: $\frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n < \varphi < \frac{19\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е ч а н и е. Для решения простейшего неравенства $\cos x < -\frac{1}{2}$ можно было использовать тригонометрическую окружность (рис. 97).

[1] Напомним, что буквой $\boldsymbol{Z}$ обозначают множество целых чисел, поэтому запись «$n \in \boldsymbol{Z}$» (n — элемент множества $\boldsymbol{Z}$) часто используется в том же смысле, что и «n — любое целое число».

Упражнения

290. Используя график функции $y = \cos x$, ответьте на вопросы и выполните задания.

1) Промежутку возрастания или убывания принадлежит точка: а) $\frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$; в) 5?

2) Укажите какое-нибудь значение $x > 4$, принадлежащее одновременно и промежутку возрастания, и промежутку убывания.

3) Как по графику определить чётность функции?

4) Назовите наибольшее и наименьшее значения функции.

5) Назовите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает значение, равное 1, -1. Задайте общей формулой корни уравнения $|\cos x| = 1$.

6) Решите уравнение $\cos x = 0$.

7) Найдите приближённые значения:

а) $\cos\frac{\pi}{3}$; б) $\cos(-3)$; в) $\cos 1$; г) $\cos\frac{5\pi}{6}$.

291. 1) Постройте график функции $y = \cos x$ и выделите одним цветом те его точки, ординаты которых положительны, а другим цветом — точки с отрицательными ординатами.

2) На каких промежутках функция $y = \cos x$ принимает положительные значения и на каких — отрицательные?

292. 1) Постройте график функции $y = \cos x$ на промежутке от 0 до 2π, взяв за единицу 2,5 см. Выделите цветными карандашами те точки графика, ординаты которых:

а) равны: $0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) больше: $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) меньше: $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Каковы абсциссы выделенных точек?

293. Сравните значения:

1) $\cos 0{,}8\pi$ и $\cos 0{,}7\pi$;

2) $\cos\frac{11\pi}{9}$ и $\cos\frac{7\pi}{6}$;

3) $\cos\frac{15\pi}{8}$ и $\cos\frac{11\pi}{5}$;

4) $\cos 218^\circ$ и $\sin 230^\circ$.

294. Решите неравенство:

1) $\cos x < 1$;
2) $\cos x > -1$;
3) $\cos x > 0$;
4) $\cos x < 0$;
5) $\cos x < -\sqrt{2}$;
6) $\cos x > \sqrt{3}$.

295. 1) Постройте график функции $y = \cos x$ и проведите несколько его осей симметрии.

2) Напишите общий вид уравнения оси симметрии графика функции $y = \cos x$.

296. 1) Постройте график функции $y = \cos x$ и укажите несколько центров симметрии этого графика.

2) Укажите общий вид абсцисс центров симметрии графика функции $y = \cos x$.

297. Докажите, что число π является периодом функции:

1) $y = \operatorname{tg} x$;
2) $y = \operatorname{ctg} x$.

298. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\frac{1 - \cos x}{5}$;
2) $\frac{2 - 5\cos x}{10}$;
3) $\frac{1}{2 + \cos x}$;
4) $\frac{1}{3 - 2\cos x}$.

299. 1) В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = \cos x$;
б) $y = \frac{1}{2}\cos x$;
в) $y = \cos 2x$;
г) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Укажите наименьшие периоды данных функций.

300. 1) С помощью каких преобразований графика функции $y = \sin x$ можно получить график функции

$$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)?$$

2) С помощью каких преобразований графика функции $y = \cos x$ можно получить график функции

$$y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)?$$

301. Найдите наименьший период функции:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \sin \frac{x}{2}$.

302. Какие из функций являются:

а) чётными; б) нечётными:

1) $y = \cos^3 x$;
2) $y = \sin \frac{x}{8}$;
3) $y = \sin x + \cos x$;
4) $y = \cos^3 x + \sin^5 x$;
5) $y = \dfrac{\sin^2 x + \cos^7 x + 1}{\sin^4 x}$;
6) $y = 3 \cos^5 x + \sin^6 x$?

303. Используя график, решите неравенство:

1) $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $2 \sin x \geqslant -1$;
4) $-2 \cos x \geqslant \sqrt{2}$.

304. Решите неравенство:

1) $2 \sin 2x - 1 \geqslant 0$;
2) $2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -1$;
3) $\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$;
4) $-2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{2}$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Постройте график функции $y = \cos x$ и перечислите её основные свойства.

2. Сравните значения $\cos \frac{7\pi}{6}$ и $\cos \frac{5\pi}{6}$.

3. Найдите по графику функции $y = \cos x$ следующие значения:

$$\cos 1,\ \cos 2{,}5 \text{ и } \cos(-2).$$

20. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ включает в себя все числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Как и при построении синусоиды, сначала построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

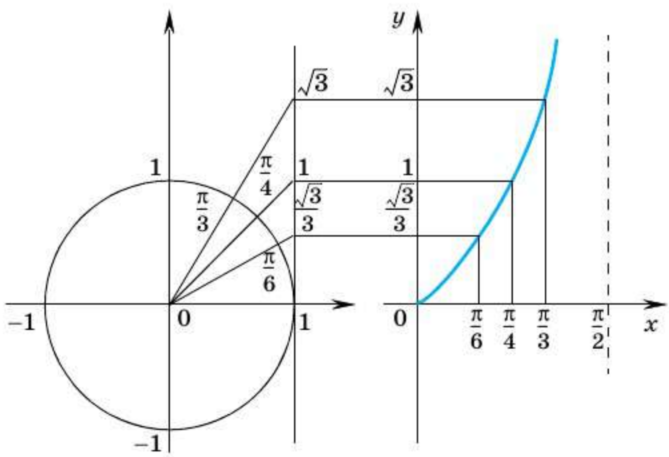


Рис. 98

В левом конце этого промежутка тангенс равен нулю, а при приближении к правому концу значения тангенса неограниченно увеличиваются (рис. 98). Графически это выглядит так, как будто график функции $y = \operatorname{tg} x$ прижимается к прямой $x = \frac{\pi}{2}$, уходя вместе с ней неограниченно вверх.

Вы уже встречались с таким свойством графика функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$: при приближении аргумента x к нулю кривая как бы прижимается к оси ординат, а при увеличении аргумента — к оси абсцисс (рис. 99). Ось абсцисс называют *горизонтальной асимптотой*, а ось ординат — *вертикальной асимптотой графика функции* $y = \frac{k}{x}$.

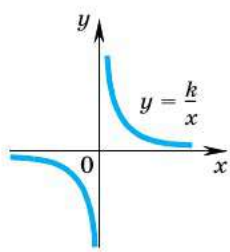


Рис. 99

Аналогично, прямая $x = \frac{\pi}{2}$ — вертикальная асимптота графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

▼ Несколько сложнее выяснить, как выглядит график функции $y = \operatorname{tg} x$ при приближении точек к началу координат.

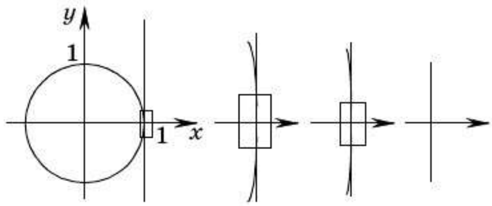


Рис. 100

Здесь снова придёт на помощь ось тангенсов. На рисунке 100 с последовательным увеличением показана зона точки касания оси тангенсов и тригонометрической окружности (каждый следующий рисунок показывает ту часть предыдущего, которая находится внутри прямоугольной рамки).

Мы видим, что при достаточно большом увеличении дуга окружности в зоне точки касания сливается с касательной. Это значит, что *при достаточно малых значениях* x имеем практически $\operatorname{tg} x \approx x$. Поэтому график функции $y = \operatorname{tg} x$ при малых значениях x сливается с прямой $y = x$. То же самое, кстати, происходит и с графиком функции $y = \sin x$. На рисунке 101 изображены части графиков функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = x$ и $y = \sin x$. △

Получить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ можно с помощью равенства $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, говорящего о симметрии графика относительно начала координат (рис. 102).

И наконец, равенство

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi n),\ n \in \boldsymbol{Z},$$

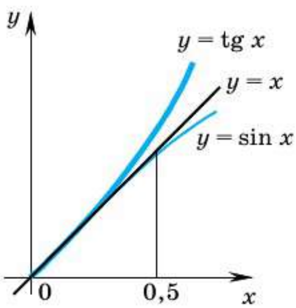


Рис. 101

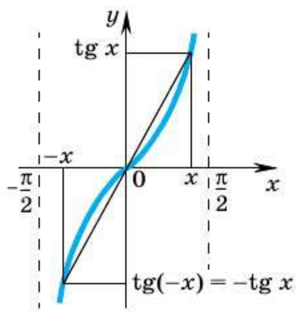


Рис. 102

позволяет размножить построенную на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ часть графика, сдвигая её вдоль оси абсцисс на π, 2π, 3π и т. д. влево и вправо (рис. 103).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют ***тангенсоидой***.

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1. Аргумент функции может принимать любые значения, кроме $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Функция может принимать любые значения.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечётная, так как для любого значения x из области определения $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

График функции $y = \operatorname{tg} x$ симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая. Её наименьшим периодом является число π.

5. Функция возрастает на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Так, при $n = 0$ получаем промежуток возрастания $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а при $n = 1$ — промежуток $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значение, равное нулю, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. График функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты, уравнения которых имеют вид $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

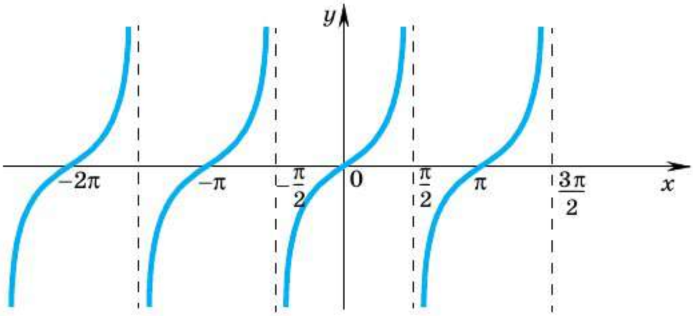


Рис. 103

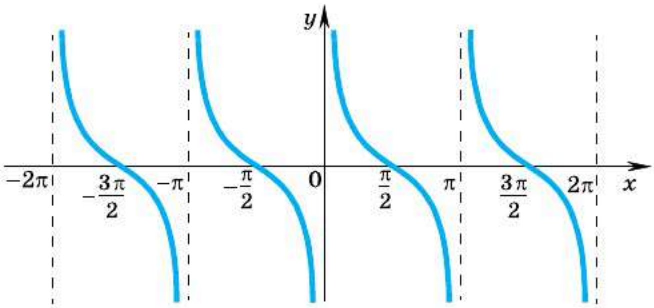


Рис. 104

Получить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно с помощью преобразования тангенсоиды, так как $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. При этом сначала, сдвигая график функции $y = \operatorname{tg} x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$ вправо, получаем график функции $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, а затем выполняем симметрию полученного графика относительно оси абсцисс. В результате получается график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 104) — ***котангенсоида***.

Пример 1. Сравнить tg 8 и tg 12.

Решение. Приведём данные тангенсы к углам от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg} 8 = \operatorname{tg}(8 - 3\pi),\ \operatorname{tg} 12 = \operatorname{tg}(12 - 4\pi).$$

Сравним $8 - 3\pi$ и $12 - 4\pi$:

$$8 - 3\pi - (12 - 4\pi) = \pi - 4 < 0,$$

значит,

$$8 - 3\pi < 12 - 4\pi.$$

Поскольку на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает, имеем

$$\operatorname{tg} 8 = \operatorname{tg}(8 - 3\pi) < \operatorname{tg}(12 - 4\pi) = \operatorname{tg} 12.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 8 < \operatorname{tg} 12$.

Пример 2. Найти наименьший период функции
$$f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Решение. Чтобы найти наименьший период функции $f(x)$, заметим, что её область определения включает в себя все числа, кроме $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому для любого положительного T, меньшего, чем $\frac{\pi}{2}$, требование 1) из определения периода не выполняется, так как $x = \frac{\pi}{2} - T$ входит в область определения, а $x + T = \left(\frac{\pi}{2} - T\right) + T = \frac{\pi}{2}$ — не входит. С другой стороны, для $T = \frac{\pi}{2}$ значения x, $x - T$ и $x + T$ одновременно входят или не входят в область определения для любого x.

При любом значении x из области определения $f(x)$ имеем $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, наименьшим периодом функции $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ является $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Упражнения

305. Верны ли утверждения?

1) Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ нечётные.

2) Большему значению аргумента соответствует большее значение тангенса. Рассмотрите данное утверждение при значении аргумента:

$x_1 = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \pi$; $x_3 = \frac{2\pi}{3}$; $x_4 = 2\pi$.

3) Большему значению аргумента соответствует меньшее значение котангенса. Рассмотрите данное утверждение при следующих значениях аргумента:

$x_1 = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \pi$; $x_3 = \frac{2\pi}{3}$; $x_4 = 2\pi$.

306. Выполните задания, используя график функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Найдите приближённое значение:

а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{tg} 1$; в) $\operatorname{tg} 2$; г) $\operatorname{tg} (-1)$.

2) Сравните значения:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; в) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 2$;

б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ и $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$; г) $\operatorname{tg} (-1)$ и $\operatorname{tg} (-2)$.

3) Запишите промежутки, на которых функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:

а) положительные значения;

б) отрицательные значения.

307. Выполните задания, используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

1) Найдите приближённое значение:

а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg} 1$; в) $\operatorname{ctg} 2$; г) $\operatorname{ctg} (-1)$.

2) Сравните значения:

а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$; б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{7}$; в) $\operatorname{ctg} 1$ и $\operatorname{ctg} 2$.

3) Запишите промежутки, на которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает:

а) положительные значения;

б) отрицательные значения.

308. 1) Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$ и выделите разными цветами те точки графика, ординаты которых:

а) равны 1, больше 1, меньше 1;

б) равны -2, больше -2, меньше -2.

2) Запишите абсциссы выделенных точек.

309. 1) Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и выделите разными цветами те точки графика, ординаты которых:

а) равны 1, больше 1, меньше 1;

б) равны -3, больше -3, меньше -3.

2) Запишите абсциссы выделенных точек.

310. Решите графически неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$;
3) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$;
4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) $\operatorname{tg} x > 3$;
6) $\operatorname{ctg} x \leqslant -3$.

311. Докажите, что:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$;
2) $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha - 2\pi)$.

312. Установите, какие из следующих функций чётные, какие нечётные, а какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = x + \sin x$;
2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
3) $y = x^2 \cos x$;
4) $y = \operatorname{tg}^2 x + \sin x$;
5) $y = \operatorname{tg} x \cdot |x|$;
6) $y = \cos\frac{x^2 - x}{x - 1}$;
7) $y = \operatorname{ctg} x - \cos x$;
8) $y = \sin\frac{x^{23} - x^{21}}{x^2 - 1}$.

313. 1) С помощью каких преобразований из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить графики функций

$$y = \operatorname{tg} x + 2 \text{ и } y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)?$$

2) Постройте в одной системе координат графики функций:

$$y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{tg} x + 2 \text{ и } y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

314. Как с помощью преобразований графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ получить графики функций:

1) $y = \operatorname{ctg} x - 1$;
2) $y = \operatorname{ctg}(-x)$;
3) $y = \operatorname{ctg}(x - 1)$?

315. Сравните с помощью графика:

1) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 2$;
2) $\operatorname{tg}(-1)$ и $\operatorname{tg}(-2)$;
3) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$;
4) $\operatorname{ctg}(-2)$ и $\operatorname{ctg}(-3)$;
5) $\operatorname{tg} 3$ и $\operatorname{ctg} 3$;
6) $\operatorname{ctg} 1$ и $\cos 1$.

316. 1) Постройте график функции:

а) $y = \operatorname{ctg} x - 1$;
б) $y = \operatorname{ctg}(-x)$;
в) $y = \operatorname{ctg}(x - 1)$.

2) Является ли данная функция периодической?

317. Найдите корни уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 1$ на промежутке:

а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $(2\pi; 4\pi)$;

2) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ на промежутке:

а) $(0; \pi)$; б) $(\pi; 2\pi)$; в) $(2\pi; 4\pi)$;

3) $\operatorname{tg} x = 2$ на промежутке:

а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $(2\pi; 4\pi)$.

318. При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$; 2) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} x$; 3) $|\operatorname{tg} x| = |\operatorname{ctg} x|$?

319. Укажите, если возможно, промежутки возрастания следующих функций:

1) $y = \sin x$; 3) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = x^3$;
2) $y = \operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{ctg} x$; 6) $y = 2x + 3$.

320. Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции:

1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $y = \sin \frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

321. Найдите наименьший период функции:

1) $y = \operatorname{tg} 2x$; 3) $y = \operatorname{ctg}^2 x$;

2) $y = \operatorname{tg}^2 x$; 4) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

322. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ решите графически неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < x$; 2) $\operatorname{tg} x > 1 - x^2$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$. Какие из этих свойств имеет функция $y = \operatorname{tg} x$?

2. С помощью каких преобразований графика функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить график функции $y = -\operatorname{tg}(2x - \pi)$?

21. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Равенства $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ выражают соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента φ. С их помощью, зная синус и косинус некоторого угла, можно найти его тангенс и котангенс. Из этих равенств легко получить, что тангенс и котангенс связаны между собой следующим равенством.

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 1}$$

Познакомимся с некоторыми другими зависимостями между тригонометрическими функциями.

Уравнение единичной окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = 1$ связывает абсциссу и ординату любой точки этой окружности.

Основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

Основное тригонометрическое тождество часто используется при преобразовании тригонометрических выражений.

Пример 1. Упростить выражение $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$.

Решение.

$$(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha =$$
$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

Полезно запомнить тождества.

$$1 - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi \qquad 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$$

Эти равенства, получающиеся из основного тригонометрического тождества, также являются тождествами.

Разделив почленно основное тригонометрическое тождество на $\cos^2 \varphi$, получим:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \text{ т. е. } 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

$$\boldsymbol{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}}$$

Аналогично, делением основного тригонометрического тождества на $\sin^2 \varphi$ получаем следующую формулу.

$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}}$$

Зависимости между тригонометрическими функциями позволяют по значению одной из них находить значения остальных тригонометрических функций при том же значении аргумента.

Пример 2. Найти $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

Решение. Из равенства $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ получаем

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Условие $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ говорит о том, что α может являться углом II, III или IV четверти. Однако синус угла α в данной задаче положителен, значит, α — угол II четверти.

Косинусы углов II четверти отрицательны, поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Подставим в это равенство данное в условии значение $\sin \alpha$:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Далее имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\dfrac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\dfrac{12}{5}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{12}{5}$.

Пример 3. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

Решение. Можно сразу найти $\operatorname{ctg}\alpha$: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{15}{8}$.

Из равенства $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ следует, что

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{64}{225}} = \frac{225}{289}.$$

Поскольку в данной задаче $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ и $\operatorname{tg}\alpha$ положителен, то α является углом III четверти (тангенсы углов II и IV четвертей отрицательны).

Учитывая, что косинусы углов III четверти отрицательны, получаем:

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\frac{15}{17}.$$

Найдём $\sin\alpha$ из равенства $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = -\frac{15}{17} \cdot \frac{8}{15} = -\frac{8}{17}.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{15}{8}$.

Пример 4. Доказать тождество

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) =$$

$$= \cos^2\alpha\left(\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = \cos^2\alpha\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

323. Могут ли синус и косинус одного и того же аргумента быть равными соответственно:

1) $\frac{5}{13}$ и $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|a|+|b|\neq 0$?

324. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если:

1) $\sin\alpha = \frac{56}{65}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha = \frac{80}{89}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\cos\alpha = -\frac{12}{37}$ и $0<\alpha<\pi$;

4) $\cos\alpha^\circ = -\frac{40}{41}$ и $180^\circ<\alpha^\circ<360^\circ$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$ и $\pi<\alpha<2\pi$;

6) $\operatorname{tg}\alpha^\circ = -\frac{11}{60}$ и $180^\circ<\alpha^\circ<360^\circ$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{35}$ и $\pi<\alpha<2\pi$.

325. Упростите выражение:

1) $1-\sin^2\alpha$; 3) $\cos\alpha\,\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\cos^2\beta - 1$; 4) $\sin\alpha\,\operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\dfrac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta}$;

6) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$;

7) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;

8) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;

9) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\beta - \sin^2\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta - \cos^2\beta}$;

10) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

11) $\dfrac{\sin\beta}{1-\cos\beta} + \dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$;

12) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$;

13) $\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta} + \operatorname{ctg}\beta$;

14) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} - \operatorname{tg}\beta$;

15) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;

16) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

326. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$;

2) $\dfrac{5\sin\alpha + 2\cos\alpha}{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}4$.

327. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$;

2) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$;

3) $\sin^4\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta + \cos^2\beta = 1$;

4) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1$;

5) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha$;

6) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha$;

7) $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = (1+\cos x)(1+\operatorname{tg} x)$;

8) $1 + \cos\beta - \sin\beta - \operatorname{tg}\beta = (1+\cos\beta)(1-\operatorname{tg}\beta)$;

9) $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$;

10) $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;

11) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

12) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha$;

13) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$;

14) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

328. Упростите выражение:

1) $\sin 165° + \cos 195° \operatorname{ctg} 255°$;
2) $\cos 320° - \sin 220° \operatorname{tg} 130°$;
3) $\operatorname{tg} 110° \operatorname{tg} 100° \operatorname{tg} 45° \operatorname{ctg} 70° \operatorname{ctg} 80°$;
4) $\operatorname{ctg} 135° \operatorname{ctg} 125° \operatorname{ctg} 115° \operatorname{ctg} 35° \operatorname{ctg} 25°$;
5) $\dfrac{\operatorname{tg} 205°}{1 - \operatorname{ctg}^2 155°} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}^2 65° - \operatorname{tg} 45°}{\operatorname{ctg} 295°}$;
6) $\dfrac{\operatorname{tg} 144°}{1 + \operatorname{tg}^2 216°} : \dfrac{\operatorname{tg}^2 126°}{1 + \operatorname{ctg}^2 324°}$.

329. Решите уравнение:

1) $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$;
2) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x$;
3) $8 \sin^2 x - 18 \sin x + 7 = 0$;
4) $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$;
5) $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$;
6) $(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 1$;
7) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$;
8) $3 \cos x = -2 \sin x$.

330. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной x

$$(a \sin x + b \cos x)^2 + (b \sin x - a \cos x)^2.$$

331. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Найдите:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;
2) $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$.

332. Известно, что α — угол I четверти. Могут ли при одном и том же α оказаться верными неравенства:

1) $\sin \alpha < \dfrac{1}{2}$ и $\cos \alpha < \dfrac{1}{2}$;
2) $\operatorname{tg} \alpha < 2$ и $\operatorname{ctg} \alpha < 2$?

333. Докажите, что для любого острого угла:

1) сумма его синуса и косинуса больше 1;
2) сумма его тангенса и котангенса не меньше 2.

! Контрольные вопросы и задания

1. Как, зная синус угла, найти тангенс этого угла? Как решить обратную задачу: зная тангенс угла, найти синус этого угла?

2. Найдите $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\dfrac{15}{17}$ и α — угол III четверти.

3. Упростите выражение $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

4. Найдите значение выражения:
а) $\lg\operatorname{tg}3°\cdot\lg\operatorname{tg}6°\cdot\lg\operatorname{tg}9°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}87°$;
б) $\lg\operatorname{tg}3°+\lg\operatorname{tg}6°+\lg\operatorname{tg}9°+\ldots+\lg\operatorname{tg}87°$.

22. Синус и косинус суммы и разности двух углов

Точки $P_{\alpha+\beta}$, P_α и $P_{-\beta}$ — конечные точки поворотов на углы $\alpha+\beta$, α и $-\beta$ (рис. 105). Хорда $P_{\alpha+\beta}P_0$ единичной окружности при повороте на угол $-\beta$ вокруг начала координат совпадает с хордой $P_\alpha P_{-\beta}$, значит, длины отрезков $P_{\alpha+\beta}P_0$ и $P_\alpha P_{-\beta}$ равны.

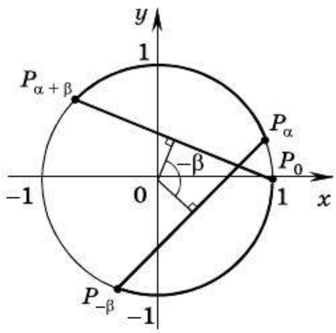


Рис. 105

Выразим длины этих отрезков, используя формулу расстояния между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ координатной плоскости:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Подставляя в эту формулу координаты точек P_0, $P_{\alpha+\beta}$, P_α, $P_{-\beta}$, получим:

$$P_0P_{\alpha+\beta}=\sqrt{(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+(\sin(\alpha+\beta)-0)^2},$$
$$P_\alpha P_{-\beta}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos(-\beta))^2+(\sin\alpha-\sin(-\beta))^2}.$$

Так как длины отрезков равны, то

$$\sqrt{(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha+\beta)}=$$
$$=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2}.$$

Возведём обе части этого равенства в квадрат:

$$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2.$$

Преобразуем левую часть полученного равенства:

$$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=2-2\cos(\alpha+\beta).$$

Теперь преобразуем правую часть равенства:

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta).$$

Следовательно,

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta).$$

Отсюда

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Формула косинуса суммы
$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Заменяя в этой формуле β на $-\beta$:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

получим $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Формула косинуса разности
$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

С помощью формул приведения выведем формулу синуса суммы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Формула синуса суммы
$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

Заменяя в этой формуле β на $-\beta$:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

получим $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Формула синуса разности

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Пример 1. Доказать тождество

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\cos 75^\circ\cos 65^\circ - \sin 75^\circ\sin 65^\circ}{\sin 85^\circ\cos 35^\circ - \cos 85^\circ\sin 35^\circ}.$$

В числителе дроби замечаем правую часть формулы косинуса суммы, а в знаменателе — синуса разности:

$$\frac{\cos 75^\circ\cos 65^\circ - \sin 75^\circ\sin 65^\circ}{\sin 85^\circ\cos 35^\circ - \cos 85^\circ\sin 35^\circ} = \frac{\cos(75^\circ + 65^\circ)}{\sin(85^\circ - 35^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 140^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos(90^\circ + 50^\circ)}{\sin 50^\circ} = \frac{-\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ} = -1.$$

Упражнения

334. Найдите длину хорды единичной окружности:

1) $P_0P_{\frac{\pi}{2}}$; 2) $P_{\frac{\pi}{2}}P_{2\pi}$; 3) $P_0P_{-\frac{\pi}{2}}$; 4) $P_\alpha P_\beta$.

335. Преобразуйте выражение, используя формулы синуса и косинуса суммы и разности:

1) $\cos(\alpha^\circ + 70^\circ)$;
2) $\cos(20^\circ + \beta^\circ)$;
3) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;
4) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)$;
5) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)$;
6) $\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$;
7) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;
8) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$;
9) $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$;
10) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$;
11) $\cos\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right)$;
12) $\cos\left(\frac{5\pi}{4} + \beta\right)$;
13) $\cos(\alpha + \alpha)$;
14) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
15) $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)$;
16) $\sin\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right)$.

336. Найдите:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{24}{25}$,
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < \beta < \frac{\pi}{2};$$
2) $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\beta = \frac{7}{25}$,
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < \beta < \frac{\pi}{2};$$
3) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$,
$$0 < \alpha < \pi \text{ и } 0 < \beta < \pi;$$
4) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{21}{29}$, $\sin\beta = \frac{7}{25}$,
$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi;$$
5) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $0 < \alpha < \pi$;
6) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $0 < \alpha < \pi$.

337. Используя известные значения синусов и косинусов углов $30°$, $45°$ и $60°$, найдите синус и косинус угла:
1) $15°$; 2) $75°$; 3) $105°$.

338. 1) Синусы двух углов остроугольного треугольника равны $\frac{5}{13}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите синус третьего угла.

2) Синусы двух углов некоторого треугольника равны 0,5 и 0,6. Каким может быть синус его третьего угла?
3) Чем отличаются задания 1) и 2)?

339. Найдите косинус третьего угла треугольника, если косинусы двух его углов равны:
1) $-\frac{7}{25}$ и $\frac{12}{13}$; 2) 0,8 и $\frac{20}{29}$.

340. Упростите выражение (выявите закономерность на первых двух заданиях и примените её к остальным):
1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;
2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;
3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;
4) $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)$.

341. 1) Упростите выражение (выявите закономерность на первых двух заданиях и примените её к остальным):
а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$;
б) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$;
в) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;
г) $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)$.

2) Сравните закономерности, выявленные в заданиях 340 и 341.

342. Сравните значения выражений:

1) $\frac{\cos 50° \cos 20° - \sin 50° \sin 20°}{\cos 85° \cos 15° + \sin 85° \sin 15°}$

и $\frac{\cos 70° \cos 40° - \sin 70° \sin 40°}{\cos 50° \cos 20° - \sin 50° \sin 20°}$;

2) $\dfrac{\sin 48^\circ \cos 52^\circ + \sin 52^\circ \cos 48^\circ}{\cos 75^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \sin 75^\circ}$

и $\dfrac{\cos 75^\circ \cos 85^\circ - \sin 75^\circ \sin 85^\circ}{\sin 32^\circ \cos 12^\circ - \cos 32^\circ \sin 12^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$

и $\dfrac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$.

343. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 48^\circ - \sin 23^\circ \cos 25^\circ}{\sin 2^\circ + \sin 23^\circ \cos 25^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos 40^\circ + \sin 24^\circ \sin 16^\circ}{\sin 24^\circ \sin 16^\circ - \cos 8^\circ}$.

344. Найдите значение выражения:

1) $\sin 50^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 50^\circ$;
2) $\cos 32^\circ \cos 28^\circ - \sin 32^\circ \sin 28^\circ$;
3) $\sin 85^\circ \cos 65^\circ + \sin 65^\circ \cos 85^\circ$;
4) $\cos 160^\circ \cos 25^\circ + \sin 160^\circ \sin 25^\circ$.

345. 1) Упростите выражение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\cos x + \sin 2x \cdot \sin(\pi + x).$$

2) Укажите все x, при которых его значение равно $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

346. Укажите наименьшее положительное число x, при котором значение выражения $\cos 30^\circ \cos x^\circ - \sin 30^\circ \sin x^\circ$ равно $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

347. Докажите тождество:

1) $\dfrac{2\sin(\alpha^\circ + 30^\circ) - \cos\alpha^\circ}{2\cos(\alpha^\circ - 30^\circ) - \sqrt{3}\cos\alpha^\circ} = \sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\sin(\beta^\circ - 45^\circ) + \cos\beta^\circ}{\sqrt{2}\cos(\beta^\circ + 45^\circ) + \sin\beta^\circ} = \operatorname{tg}\beta^\circ$.

348. Докажите тождество

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

349. Докажите одну из формул приведения, используя формулы данного пункта.

350. Докажите, что $\cos 15° - \sin 15° = \sin 45°$.

351. Докажите, что:

1) если $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{13}$, $\sin\beta = \frac{11}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{то } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2};$$

2) если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$,

$$\text{то } \alpha + \beta = \pi.$$

352. Решите уравнение:

1) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 0$;
2) $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 1$;
3) $\cos 3x \cos \frac{\pi}{6} + 0{,}5 = \sin 3x \sin \frac{\pi}{6}$;
4) $\sin \frac{3\pi}{2} \cos 2x = \cos \frac{3\pi}{2} \sin 2x - 1$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Напишите формулу длины отрезка с концами в точках P_α и P_β — конечных точках поворотов на углы α и β. Найдите по этой формуле длину отрезка $P_{\frac{\pi}{2}} P_{\frac{\pi}{6}}$.

2. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если:

$$\sin\alpha = \frac{40}{41},\ \cos\beta = -\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ и } \pi < \beta < 2\pi.$$

3. Упростите выражение $\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}$.

23. Тангенс суммы и тангенс разности двух углов

Тангенс суммы двух углов можно выразить через синусы и косинусы данных углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Чтобы выразить тангенс суммы двух углов через тангенсы этих углов, разделим числитель и знаменатель дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$ (если существуют тангенсы углов α и β, то произведение косинусов этих углов отлично от нуля):

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формула тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Заметим, что если $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ не существует.

Такая ситуация наблюдается с острыми углами прямоугольного треугольника. Их сумма равна $90°$, и тангенса у неё нет.

Формулу тангенса разности получаем, заменяя в формуле тангенса суммы β на $-\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(-\beta)}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формула тангенса разности

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Пример 1. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{13}$,

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Доказательство. Найдём тангенс суммы углов α и β:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{13}}{1 - \dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{3}{13}} = 1.$$

Сложив почленно неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, получим $0 < \alpha + \beta < \pi$.

Единственным углом в промежутке от 0 до π, тангенс которого равен 1, является угол $\frac{\pi}{4}$. Значит, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}.$$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} =$$

$$= 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 2.$$

Ответ: 2.

Упражнения

353. При $\operatorname{tg}\alpha° = 1{,}5$ и $\operatorname{tg}\beta = 1{,}5$ найдите:

1) $\operatorname{tg}(\alpha° + 60°)$;
2) $\operatorname{tg}(45° - \alpha°)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right)$.

354. Используя известные значения тангенсов углов 30°, 45° и 60°, найдите:

1) $\operatorname{tg} 15°$; 2) $\operatorname{tg} 75°$; 3) $\operatorname{tg} 105°$.

355. Найдите: 1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если:

а) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}2$, $\sin\beta = -0{,}8$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$;

в) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

356. Найдите $\operatorname{tg}\beta$, если:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=2$;
2) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\beta\right)=-2$;
3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3$ и $\operatorname{tg}\alpha=2$;
4) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=2{,}5$ и $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$.

357. Найдите тангенс третьего угла треугольника, если тангенсы двух его углов равны:

1) $\frac{5}{4}$ и 0,9;
2) $\frac{1}{3}$ и 0,4.

358. Тангенсы двух углов треугольника равны $\frac{2}{3}$ и 1,5. Найдите третий угол треугольника.

359. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{tg}23^\circ+\operatorname{tg}22^\circ}{1-\operatorname{tg}22^\circ\operatorname{tg}23^\circ}$;
2) $\frac{\operatorname{tg}73^\circ-\operatorname{tg}43^\circ}{1+\operatorname{tg}73^\circ\operatorname{tg}43^\circ}$;
3) $\frac{1+\operatorname{tg}273^\circ\operatorname{tg}63^\circ}{\operatorname{tg}273^\circ-\operatorname{tg}63^\circ}$;
4) $\frac{1-\operatorname{tg}161^\circ\operatorname{tg}139^\circ}{\operatorname{tg}161^\circ+\operatorname{tg}139^\circ}$.

360. Какое из следующих выражений имеет значение $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

1) $\sin 23^\circ\cos 37^\circ-\cos 23^\circ\sin 37^\circ$;
2) $\sin 54^\circ\cos 24^\circ-\cos 54^\circ\sin 24^\circ$;
3) $\frac{\operatorname{tg}18^\circ+\operatorname{tg}12^\circ}{1-\operatorname{tg}18^\circ\operatorname{tg}12^\circ}$?

361. Верно ли, что значение данного выражения равно 1:

1) $\sin 126^\circ\cos 36^\circ-\cos 126^\circ\sin 36^\circ$;
2) $\cos 152^\circ\cos 28^\circ-\sin 152^\circ\sin 28^\circ$;
3) $\frac{\operatorname{tg}14^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}14^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$?

362. Докажите тождество:

1) $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;
2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$;
3) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\beta$;
4) $\frac{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

363. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} = -1$;

3) $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x = 4$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} x} = 0$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} 2x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

6) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0$.

364. Докажите одну из формул приведения, воспользовавшись формулами данного пункта.

365. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 50° - \operatorname{tg}^2 5°}{1 - \operatorname{tg}^2 50° \operatorname{tg}^2 5°}$;

2) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 35° \operatorname{tg}^2 25°}{\operatorname{tg}^2 35° - \operatorname{tg}^2 25°}$.

366. 1) Докажите, что:

а) угол между прямыми $y = 2x$ и $y = \dfrac{1}{3}x$ равен 45°;

б) прямые $y = 0{,}4x$ и $y = -2{,}5x$ взаимно перпендикулярны.

2) Как связаны между собой угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух взаимно перпендикулярных прямых?

Контрольные вопросы и задания

1. Выведите формулу тангенса разности, заменяя тангенс частным синуса и косинуса.

2. Найдите $\operatorname{tg}(135° + \alpha°)$, если $\operatorname{tg} \alpha° = -\dfrac{1}{3}$.

3. Упростите выражение $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

24. Тригонометрические функции двойного угла

Задача. Тангенс вписанного угла ABC равен $\dfrac{5}{4}$ (рис. 106). Найти тангенс центрального угла AOC.

Решение. Обозначим величину вписанного угла ABC буквой α, тогда величина центрального угла AOC равна 2α. Для вычисления $\operatorname{tg} 2\alpha$ воспользуемся формулой тангенса суммы:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{4}}{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = -\frac{40}{9}.$$

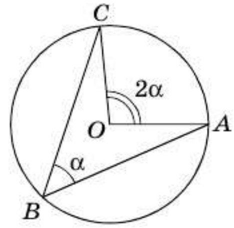


Рис. 106

Ответ: $-\frac{40}{9}$.

Формула тангенса двойного угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Подобным же образом из формул синуса и косинуса суммы получаем соответствующие формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Пример 1. Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{20}{29}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Учитывая, что α — угол второй четверти, имеем:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} =$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2} = -\sqrt{\frac{29^2 - 20^2}{29^2}} = -\sqrt{\frac{9 \cdot 49}{29}} = -\frac{21}{29}.$$

Применяя формулу синуса двойного угла, получим:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{20}{29} \cdot \left(-\frac{21}{29}\right) = -\frac{840}{841}.$$

Ответ: $-\frac{840}{841}$.

Косинус двойного угла можно выразить через косинус или через синус одинарного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

$$\boldsymbol{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

Из формулы косинуса двойного угла можно выразить косинус и синус угла, в 2 раза меньшего

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Эти формулы часто используют для понижения степени выражений.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

Решение. $\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8},$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = \frac{5}{2},$$
$$2 + 2\cos^2 2x = \frac{5}{2}.$$

Понизим степень ещё раз:

$$2 + 1 + \cos 4x = \frac{5}{2}, \cos 4x = \frac{5}{2} - 3, \cos 4x = -\frac{1}{2}.$$

$$4x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, 4x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 3. Доказать тождество

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Решение. Преобразуем правую часть равенства:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

367. Преобразуйте по формулам двойного угла выражение:

1) $\sin 22°$;
2) $\sin 42°$;
3) $\cos 14°$;
4) $\cos 66°$;
5) $\operatorname{tg} 26°$;
6) $\operatorname{tg} 51°$;
7) $\sin 0{,}2\pi$;
8) $\sin \frac{2\pi}{5}$;
9) $\cos \frac{\pi}{7}$;
10) $\cos \frac{3\pi}{8}$;
11) $\operatorname{tg} 0{,}3\pi$;
12) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$;
13) $\sin \alpha$;
14) $\cos \alpha$;
15) $\sin 3\alpha$;
16) $\cos \frac{\alpha}{2}$;
17) $\sin (\alpha+\beta)$;
18) $\cos (\alpha-\beta)$;
19) $\sin \left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$;
20) $\cos \left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$;
21) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

368. Найдите значение:

1) $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0{,}96$ и $0 < \alpha < \pi$;

3) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

4) $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\operatorname{tg} \beta = -0{,}75$;

6) $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{7}$.

372. 1) Упростите выражение, используя формулу синуса двойного угла:

а) $2 \sin 10° \cos 10°$;

б) $2 \sin 10° \cos 10° \cos 20°$;

в) $\cos 10° \cos 20° \cos 40° \cos 80°$;

г) $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha$.

2) Сколько раз вы использовали формулу синуса двойного угла в каждом случае?

3) В чём вы видите усложнение каждого следующего выражения?

373. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$; 2) $y = 3 \cos x$ и $y = 6 \sin 2x$.

374. Укажите наименьшее положительное число x, при котором:

1) $\sin x° = \sin^2 75° - 2 \sin 75° \cos 75° + \cos^2 75°$;

2) $\cos x° = \cos^2 105° - \sin^2 105°$.

375. Решите уравнение, применяя формулы двойного аргумента:

1) $2 \sin x \cos x = 1$;

2) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $4 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$;

4) $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 0$.

376. Решите уравнение, понижая его степень с помощью приведённых формул:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$; 2)* $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

377. Докажите тождество:

1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$;

2) $\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$;

3) $\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha$;

4) $\left(\sin\frac{\beta}{4} - \cos\frac{\beta}{4}\right)^2 = 1 - \sin\frac{\beta}{2}$;

5) $1 - 8\sin^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4} = \cos\alpha$;

6) $\cos^2\frac{\beta}{2} - 4\sin^2\frac{\beta}{4}\cos^2\frac{\beta}{4} = \cos\beta$;

7) $\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha = \cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

8) $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} - \sin\beta = \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\cos\beta$.

378. Проверьте равенство:

1) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \sin\frac{\alpha}{4}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}} = \cos\frac{\alpha}{4}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$.

379. Докажите тождество $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$.

380. Может ли при каком-либо значении x быть верным равенство:
1) $\sin x^\circ \cos x^\circ = \sin 24^\circ$;
2) $\sin x^\circ \cos x^\circ = \sin 34^\circ$;
3) $\cos^2 x^\circ - \sin^2 x^\circ = 2\cos 100^\circ$;
4) $\sin^2 x^\circ - \cos^2 x^\circ = 2\cos 150^\circ$?

381. Докажите, что $\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(3 - 4\sin^2\alpha)$.

382. При каких значениях аргумента функция y принимает наибольшее значение, а при каких — наименьшее? Каковы эти значения?
1) $y = \sin 2x$;
2) $y = \cos 2x$;
3) $y = \sin x\cos x$;
4) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;
5) $y = \sin x\cos x\cos 2x$;
6) $y = \sin 2x\,(\sin^2 x - \cos^2 x)$.

383. 1) Докажите тождество

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$$

2) Попытайтесь придумать аналогичные тождества.

Контрольные вопросы и задания

1. Выведите формулы синуса и косинуса двойного угла.
2. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2} = -0{,}6$.
3. Докажите тождество $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование

Формулы сложения, с которыми вы познакомились в предыдущих пунктах, отличаются знаком в правых частях равенства:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Это наводит на мысль о почленном сложении или вычитании указанных пар равенств. Сложим первые два равенства:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Делением обеих частей этого равенства на 2 получим формулу, позволяющую переходить от произведения к сумме косинусов

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

Формула перехода от произведения косинусов к их сумме

$$\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))}$$

Обозначим теперь в формуле

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

буквой x сумму $\alpha + \beta$, а буквой y разность $\alpha - \beta$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y. \end{cases}$$

Из этой системы, сначала складывая её уравнения, а затем вычитая из первого уравнения второе, найдём, что

$$\alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2}.$$

Подставим введённые обозначения в формулу

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Формула перехода от суммы косинусов к их произведению

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Подобным же образом из формул сложения можно получить и следующие формулы перехода.

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Заменяя в последней формуле y на $-y$:

$$\sin x + \sin(-y) = \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

получим ещё одну формулу.

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ.$$

Решение.

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \cos 10^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 10^\circ - \frac{1}{4}\cos 10^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 10^\circ + \cos 30^\circ) - \frac{1}{4}\cos 10^\circ = \frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Пример 2. Доказать тождество

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Доказательство.

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \sin 5\alpha) + \sin 3\alpha}{(\cos\alpha + \cos 5\alpha) + \cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha\,(2\cos 2\alpha + 1)}{\cos 3\alpha\,(2\cos 2\alpha + 1)} = \operatorname{tg} 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Решить уравнение $\sin x - \cos 3x = 0$.

Решение 1. Среди формул перехода от суммы или разности к произведению нет соответствующей формулы, поэтому с помощью формулы приведения заменим $\sin x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 3x = 0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0.$$

Произведение в левой части уравнения равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0 \text{ или } \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0;$$

$$\frac{\pi}{4}+x=\pi n \text{ или } \frac{\pi}{4}-2x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},$$

$$x=\pi n-\frac{\pi}{4} \text{ или } x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\pi n-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}, n\in \boldsymbol{Z}$.

Решение 2. Можно было воспользоваться *условием равенства синуса и косинуса*, заметив, что $\sin\alpha=\cos\beta$ только в двух случаях:

1) $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

2) $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$ (рис. 107).

Тогда

1) $4x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$;

2) $-2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=-\frac{\pi}{4}-\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

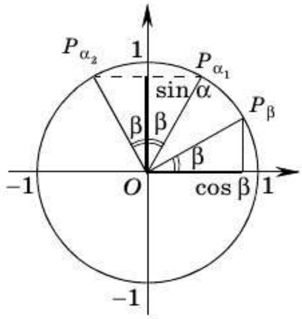


Рис. 107

Упражнения

384. Прочитайте выведенные в этом пункте формулы, используя слова «полусумма» и «полуразность».

385. Преобразуйте выражение в произведение тригонометрических функций и, где возможно, упростите его:

1) $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$;
2) $\sin 152^\circ+\sin 28^\circ$;
3) $\sin 78^\circ-\sin 42^\circ$;
4) $\cos 48^\circ-\cos 12^\circ$;
5) $\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{12}$;
6) $\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{18}$;
7) $\sin 3\alpha-\sin 5\alpha$;
8) $\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$;
9) $\frac{1}{2}+\cos 40^\circ$;
10) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha$;
11) $\frac{3}{4}-\cos^2\alpha$;
12) $\frac{1}{4}-\sin^2\alpha$.

386. Упростите выражение:

1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

387. 1) Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2) Попытайтесь описать словами особенности выражений, приведённых в заданиях 386 и 387.

388. Вычислите, не пользуясь калькулятором:

1) $\cos 37{,}5^\circ \cos 7{,}5^\circ$; 2) $\sin 52{,}5^\circ \sin 7{,}5^\circ$.

389. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}$;

2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

6) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

7)● $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

8)● $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

390. Преобразуйте произведение в сумму и упростите:

1) $\sin 45^\circ \sin 15^\circ$; 3) $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}$;

2) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$; 4) $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}$.

391.● Вычислите:

1) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$;

2) $\operatorname{tg}20^\circ \operatorname{tg}40^\circ \operatorname{tg}60^\circ \operatorname{tg}80^\circ$.

392. Решите уравнение, используя формулы суммы и разности тригонометрических функций:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$;
2) $\cos 4x + \cos x = 0$;
3) $\sin 5x = \sin x$;
4) $\sin 3x = \cos 2x - \cos x$;

5) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$;

6) $\sin(x + \alpha) + \sin(x - \alpha) = \cos\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

393. Решите уравнение, используя разложение на множители (сгруппируйте члены, к которым будет применяться формула суммы или разности):

1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
3) $\cos x - \sin 3x = \cos 5x$;
4) $\cos(x - \alpha) - \cos(x + \alpha) = \sin\alpha$.

394. 1) Упростите выражение:

а) $\sin\alpha(\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha)$;
б) $\sin\alpha(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha)$;
в) $\sin 2\alpha(\sin\alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha)$.

2) В чём особенность аргументов синусов, стоящих в скобке? Какая связь между аргументами синусов, стоящих в скобках, и аргументом синуса вне скобок?

395. 1) Упростите выражение:

а) $\sin\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)$;
б) $\sin\alpha(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha)$;
в) $\sin 2\alpha(\cos\alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha)$.

2) В чём особенность аргументов косинусов, стоящих в скобке? Какая связь между аргументами косинусов, стоящих в скобках, и аргументом синуса за скобками? Сравните закономерности, полученные в данном и предыдущем заданиях, и сделайте общий вывод.

396. 1) Вычислите, используя закономерности, найденные в двух предыдущих заданиях:

а) $\sin 10^\circ(\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ)$;
б) $\sin 20^\circ(\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 90^\circ + \cos 130^\circ)$;
в) $\sin 30^\circ(\sin 10^\circ + \sin 70^\circ + \sin 130^\circ)$.

2) Составьте самостоятельно несколько примеров, используя данные закономерности.

397. 1) Докажите тождества:

а) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = \dfrac{\sin^2 4\alpha}{\sin\alpha}$;

б) $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha = \dfrac{\sin 8\alpha}{2\sin\alpha}$;

в) $\cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha + \cos 14\alpha = \dfrac{\sin 6\alpha}{2\sin 2\alpha}$.

2) Попытайтесь придумать аналогичное тождество.

398. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:
1) $y = \sin 2x$ и $y = \sin 4x$; 2) $y = \cos 7x$ и $y = \cos 3x$.

399. Найдите на промежутке $[-\pi; \pi]$ все решения уравнения:
1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 2) $\cos 3x + \cos x = 0$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Как преобразовать разность косинусов в произведение?

2. Выведите формулу $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$.

3. Вычислите:
а) $\sin 75° \sin 15°$;
б) $\cos 78° - \cos 42°$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} \sin 70° + \log_{\frac{1}{2}} \sin 50° + \log_{\frac{1}{2}} \sin 10°$.

26. Решение тригонометрических уравнений

В предыдущих пунктах вы уже встречались с тригонометрическими уравнениями. В большинстве случаев исходное уравнение в процессе решения сводится к простейшим тригонометрическим уравнениям. Однако для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех зависит от знания тригонометрических формул и от умения выбрать из них нужные. При этом обилие различных формул иногда делает этот выбор довольно трудным.

Рассмотрим несколько основных типов тригонометрических уравнений.

Уравнения, сводящиеся к квадратным

Пример 1. Решить уравнение $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.

Решение. С помощью основного тригонометрического тождества это уравнение можно свести к квадратному относительно $\sin x$:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0, \quad 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0,$$
$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0, \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Введём новую переменную $y = \sin x$, тогда уравнение примет вид: $2y^2 - 3y - 2 = 0$.

Корни этого уравнения: $y_1 = 2$, $y_2 = -0{,}5$.

Возвращаемся к переменной x и получаем простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\sin x = 2$ — это уравнение не имеет корней, так как $\sin x < 2$ при любом значении x;

2) $\sin x = -0{,}5$, $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x_2 = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Сравнивая серии корней

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n \text{ и } x_2 = -\arcsin a + \pi(2n + 1),\ n \in \boldsymbol{Z},$$

уравнения $\sin x = a$ при $0 < |a| < 1$, можно заметить, что знак «минус» появляется перед арксинусом, когда прибавляется нечётное число π. А при прибавлении чётного числа π арксинус берётся со знаком «плюс». Такое чередование знаков арксинуса можно обеспечить, домножив его на выражение $(-1)^n$.

Получится объединённая формула корней.

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, где n — любое целое число.

Применяя эту формулу к рассмотренному в примере 1 уравнению, получим:

$$(-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ещё проще можно объединить серии корней уравнения

$$\cos x = a$$

при $0 < |a| < 1$.

$x = \pm\arccos a + 2\pi n$, где n — любое целое число.

Объединённые формулы корней позволяют записывать ответы более компактно, однако в некоторых случаях, например при отборе корней, принадлежащих некоторому числовому промежутку, удобнее работать с каждой серией корней отдельно.

Однородные тригонометрические уравнения

Пример 2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Решение. Рассмотрим два случая:

$$1)\ \cos x = 0 \text{ и } 2)\ \cos x \neq 0.$$

Случай 1. Если $\cos x = 0$, то уравнение принимает вид $2\sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$. Но это равенство не удовлетворяет условию $\cos x = 0$, так как ни при каком x косинус и синус одновременно в нуль не обращаются.

Случай 2. Если $\cos x \neq 0$, то можно разделить уравнение на $\cos^2 x$ и получить $2\,\mathrm{tg}^2\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 5 = 0$.

Вводя новую переменную $y = \mathrm{tg}\, x$, получаем квадратное уравнение $2y^2 - 3y - 5 = 0$.

Корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = 2{,}5$.

Возвращаемся к переменной x.

$$\mathrm{tg}\, x = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{tg}\, x = 2{,}5,\ x = \mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание. Обозначив в исходном уравнении $\sin x$ буквой u, а $\cos x$ буквой v, получим уравнение вида $au^2 + buv + cv^2 = 0$.

Левая часть этого уравнения — многочлен, каждый член которого имеет вторую степень, а правая — нуль. Такое уравнение называют **однородным уравнением второй степени**.

Делением на v^2 такое уравнение сводится к квадратному относительно $\frac{u}{v}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x - 3 = 0.$$

Решение. Данное уравнение можно свести к однородному тригонометрическому уравнению второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Представим с помощью основного тригонометрического тождества число 3 как $3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x$:

$$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Приведя подобные члены, получим уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$$

из примера 2.

Пример 4. Решить уравнение

$$3 \sin 2x + 7 \cos 2x + 3 = 0.$$

Решение. Это уравнение тоже можно свести к однородному. Применяя формулы синуса и косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, получим:

$$6 \sin x \cos x + 7 (\cos^2 x - \sin^2 x) + 3 (\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$
$$6 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x - 4 \sin^2 x = 0,$$
$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0.$$

Снова пришли к однородному уравнению второй степени, рассмотренному в примере 2.

Примечание. В этом примере сами аргументы синуса и косинуса наталкивали на мысль о применении формул двойного угла. Но точно так же можно решить и уравнение $3 \sin x + 7 \cos x + 3 = 0$, если рассматривать x как двойной угол: $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$.

В рассмотренных примерах были тригонометрические функции одного аргумента. Если же аргументы разные, то уравнение стараются или привести к одному аргументу, или свести его к виду $f(x) \cdot g(x) = 0$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

Решение. Применим в левой части уравнения формулу разности квадратов:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x,$$
$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin 2x,$$
$$-\cos 2x = \sin 2x.$$

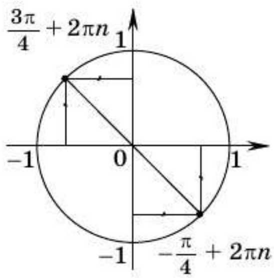


Рис. 108

Отметим на единичной окружности углы, синус и косинус которых противоположны (рис. 108).

Имеем: $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание 1. Можно было отнестись к уравнению $-\cos 2x = \sin 2x$ как к однородному уравнению первой степени и рассмотреть два случая:

1) если $\cos 2x = 0$, то $\sin 2x = 0$ (эти два равенства не могут быть верными одновременно);

2) если $\cos 2x \neq 0$, то, разделив обе части на $\cos 2x$, получим: $\operatorname{tg} 2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание 2. Запишем уравнение $-\cos 2x = \sin 2x$ в виде $\sin 2x + \cos 2x = 0$ и преобразуем его левую часть, вводя ***вспомогательный угол***. Для этого умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и воспользуемся тем, что $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Получим:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi n,$$
$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ \text{где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

▼ Приём введения вспомогательного угла всегда позволяет заменить выражение $a \sin x + b \cos x$ синусом или косинусом. Для этого надо добиться, чтобы коэффициенты синуса и косинуса являлись соответственно косинусом и синусом некоторого угла, т. е. чтобы сумма их квадратов оказалась равной 1:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \varphi),$$

где $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Введение вспомогательного угла особенно удобно, когда вспомогательный угол табличный, т. е. равен $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$ и т. п.

Например, при решении уравнения $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ имеем: $\sqrt{1 + 3} = 2$,

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x_1 = 2\pi n,\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\ \triangle$$

Пример 6. Решить уравнение $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x$.

Решение. Перенесём все члены в левую часть и преобразуем её:

$$\sin x + \sin 3x - 4 \cos^2 x = 2 \sin 2x \cos x - 4 \cos^2 x =$$
$$= 2 \cos x (\sin 2x - 2 \cos x) = 2 \cos x (2 \sin x \cos x - 2 \cos x) =$$
$$= 4 \cos^2 x (\sin x - 1).$$

Уравнение приобрело вид: $4 \cos^2 x (\sin x - 1) = 0$.

Поскольку левая часть уравнения имеет смысл при всех значениях x, получаем два случая: $\cos x = 0$ или $\sin x - 1 = 0$, $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Поскольку вторая серия корней полностью содержится в первой, её в ответе не указываем.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

400. Решите уравнение:

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;
2) $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$;
3) $(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$;
4) $\sin^2 x - 6\sin x = 0$.

401. 1) Решите уравнение, сведя его к квадратному:

а) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;
б) $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$;
в) $6 - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x$;
г) $2\operatorname{tg} x - 5\operatorname{ctg} x = 3$;
д) $\cos x - \sin^2 x = 1$;
е) $\sin x = 5 + \cos^2 x$;
ж) $2\cos^2 x + 4 = -\sin x$;
з) $8\cos^4 x - 6\sin^2 x + 1 = 0$.

2) Выделите особенности уравнений, сводящихся к квадратным.

402. 1) Решите однородное уравнение:

а) $\sin x + \cos x = 0$;
б) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$;
в) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;
г) $\sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0$.

2) Выделите особенности данных уравнений.

3) Какими ещё способами вы можете решить данные уравнения?

403. 1) Решите уравнение, сведя его к однородному:

а) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$;
б) $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 2 = 0$.

2) Чем отличаются эти уравнения от однородных уравнений?

404. 1) Используя формулы, решите уравнение:

а) $\cos^2 x - \sin^2 x = -1$;
б) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$;
в) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$;
г) $\cos^6 x + \sin^6 x = 1$.

408. Докажите, что если $x^2 + y^2 = 1$, то существует такое число φ, что одновременно $\sin\varphi = x$ и $\cos\varphi = y$.

409. Докажите, что не имеет корней уравнение

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2.$$

410. Определите, если возможно, тип уравнения. Наметьте план решения и выполните его.

1) $\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4}$;

2) $3\cos^2 x + 4\sin x = 4$;

3) $\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1$;

4) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$;

5) $\sin^3 x\cos x - \sin x\cos^3 x = \frac{1}{4}$;

6) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$;

7) $\sin(x + \pi) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

8) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$;

9) $\cos 3x = \cos 5x$;

10) $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$;

11) $1 + \cos 3x + \cos 7x + \cos 10x = 0$;

12) $2\sin^2 x = 4 - 5\cos x$;

13) $7\sin^2 x = 8\sin x\cos x - \cos^2 x$;

14) $\sin 2x\cos 3x + \cos 2x\sin 3x = 1$;

15) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2$;

16) $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \frac{1}{2}$.

411. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4\sin 3x\sin x - 2\cos 2x + 1 = 0$.

412. Найдите на отрезке $[-\pi; \pi]$ все решения уравнения:

1) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;

2) $\frac{2\cos^2 x + \cos x}{2\cos x + 7\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$.

413. Найдите все решения уравнения:

1) $\sin 2x + \cos x + 2 \sin x = -1$, удовлетворяющие условию $0 < x < 5$;

2) $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{3} + \sin 2x$, удовлетворяющие условию $0 < x < 2$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Какие способы решения тригонометрических уравнений вы знаете?

2. Решите уравнение:
а) $\mathrm{tg}^2 x - 3 = 0$;
б) $6 \sin^2 x - \cos x = 5$;
в) $\sin^2 x - \sin 2x = 0$;
г) $\sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \cos x = 0$.

? Вопросы для самооценки

1. Оцените результаты изучения этой главы. Довольны ли вы ими?

2. Что нового вы узнали в этой главе?

3. Как могут пригодиться вам эти знания в повседневной жизни?

4. Какие задания в этой главе были для вас самыми трудными? Почему?

5. Использовали ли вы при выполнении заданий дополнительные источники: справочники, пособия, интернет-ресурсы?

6. Обращались ли вы за помощью к одноклассникам, родителям, учителю?

7. Проверяли ли вы свои знания и умения по контрольным вопросам и заданиям к пункту?

8. Пользовались ли вы разделами «Ответы», «Советы» и «Решения», предметным указателем?

Глава 5

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКИ

27. Понятие о вероятности

Каждому из нас хотелось бы, конечно, уметь предвидеть события будущего. Так, зная, какие задания достанутся на ЕГЭ, можно подготовить верные ответы и получить много баллов. К сожалению, во многих случаях неизвестно, какое из возможных событий произойдёт, а какое — нет. Вместе с тем ожидать одних событий обычно бывает больше оснований, чем других. Так, например, вытаскивая карту из хорошо перетасованной колоды, лучше рассчитывать на то, что эта карта не окажется тузом, чем на то, что будет вытащен туз. Хотя оба события возможны, но их возможности имеют как бы разную степень. Для оценки степени возможности различных событий математики разработали понятие вероятности. Так, в примере с картами вероятность вытащить туза меньше, чем вероятность вытащить какую-нибудь другую карту.

Пусть некоторое действие (эксперимент) обязательно приводит к одному из n равновероятных результатов (исходов), и в m из них происходит интересующее нас событие A (эти исходы будем называть благоприятными для A).

Вероятность события A равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех равновероятных исходов[1].

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Напомним, что если для A благоприятны все исходы, то событие A ***достоверное*** и его вероятность равна 1. Если же исходов, благоприятных для события, нет, то его вероятность равна 0, и событие называют ***невозможным***.

[1] Иногда вероятность выражают в процентах, принимая число 1 за 100%.

Пример 1. Найти вероятность вытащить туза из карточной колоды, в которой 36 карт.

Решение. При вытаскивании карты ею с равной вероятностью может оказаться любая из 36 карт колоды, значит, всего это действие имеет 36 равновероятных исходов. В каждой из четырёх карточных мастей есть свой туз, значит, в колоде четыре туза, и четыре из всех исходов благоприятны. Вероятность вытащить туза: $P_{\text{туз}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Использование формулы вероятности возможно только тогда, когда все возможные исходы эксперимента равновероятны и, кроме того, их множество конечно. Однако часто эти условия не выполняются.

Пример 2. Какова вероятность того, что подброшенная вверх пуговица упадёт и останется лежать выпуклой стороной вверх?

Решение. В отличие от монеты, симметрия которой даёт основания считать равновероятными выпадение орла и решки, у пуговицы стороны по форме разные. С другой стороны, понятно, что искомая вероятность существует. На помощь в её поиске приходит *статистический*[1] *эксперимент*. Будем подбрасывать пуговицу и считать, сколько раз она ляжет выпуклой стороной вверх (можно сократить время эксперимента, если подбрасывать одновременно несколько одинаковых пуговиц). Результаты такого эксперимента занесены в таблицу.

Число бросков (n)	10	50	100	200	300
Выпуклость вверх (m)	7	31	59	122	178
Отношение m к n $\left(\frac{m}{n}\right)$	0,7	0,62	0,59	0,61	0,59

[1] ***Математическая статистика*** — наука, изучающая методы обработки результатов наблюдения.

Отношение числа случаев, когда пуговица оказывается выпуклостью вверх, к общему числу случаев называют ***частотой*** соответствующего исхода. Можно заметить, что частота падения пуговицы выпуклостью вверх с увеличением числа n меняется незначительно, оставаясь приближённо равной 0,6. То есть пуговица падает выпуклой стороной вверх *в среднем* 6 раз из 10. Значит, вероятность того, что подброшенная пуговица упадёт выпуклой стороной вверх, приближённо равна 0,6:

$$P_{\text{выпуклость вверх}} \approx 0{,}6.$$

Понятно, что для другой пуговицы значение вероятности может оказаться иным.

Из 33 букв русского алфавита некоторые буквы используются чаще, чем другие.

Пример 3. Какова вероятность того, что выбранная наугад буква в первом абзаце этого пункта окажется буквой «а»?

Решение. Всего в первом абзаце 647 букв, буква «а» среди них встречается 52 раза, значит, вероятность того, что выбранная наугад в первом абзаце буква является буквой «а», равна $\frac{52}{647}$, т. е. примерно 8%.

Упражнения

414. Какова вероятность того, что карта, наугад вытащенная из карточной колоды, в которой 36 карт, окажется: 1) червой; 2) картинкой; 3) валетом или королём?

415. Какова вероятность того, что число очков при броске игральной кости окажется:
1) больше 2; 2) простым числом; 3) числом, кратным 3?

416. Какова вероятность того, что наудачу выбранное:
1) целое число от 40 до 70 является кратным 6;
2) целое число от 1 до 30 является делителем числа 3;
3) двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

417. Вычисляя вероятность выпадения хотя бы одной решки при бросании двух монет, Таня рассуждала так: «Выпадение хотя бы одной решки складывается из двух возможностей — выпадение решки на первой монете и выпадение решки на второй монете. Вероятность выпадения решки для любой из монет равна $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Значит, выпадение хотя бы одной решки — событие достоверное, т. е., как ни бросай две монеты, а хоть одна решка да выпадет!»
1) В каком месте своих рассуждений Таня допустила ошибку?
2) Как надо было рассуждать в данном случае и чему в действительности равна вероятность выпадения хотя бы одной решки?

418. В коробке находятся две карточки. Обе стороны одной из них белые, а у другой одна сторона белая, а другая чёрная. Из коробки наугад вытаскивают одну карточку и кладут её на стол так, что цвет её нижней стороны не виден. Если цвет верхней стороны карточки окажется белым, то какова вероятность, что у этой карточки нижняя сторона будет чёрной?

419. В среднем из 600 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

420. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 19 из Китая, 17 из США, остальные — из России. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из России.

421. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

422. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 14 участников из России, в том числе чемпион Москвы. Найдите вероятность того, что в первом туре чемпион Москвы будет играть с каким-либо шахматистом из России?

423. Конкурс вокалистов проходит 4 дня. В конкурсе участвуют 50 вокалистов — по одному от каждой страны. В первый день 26 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

424. Проведите статистический эксперимент и найдите приближённое значение вероятности того, что подброшенная канцелярская кнопка упадёт остриём вверх.

425. С какой вероятностью выбранная наугад буква в первом абзаце этого пункта окажется буквой: 1) «р»; 2) «е»?

426. В 1838 г. изобретателем электрического телеграфа американцем Морзе для передачи телеграмм была придумана специальная азбука. Каждая буква азбуки Морзе записывается в виде последовательности точек и тире. Объясните, почему в азбуке Морзе буква «е» передаётся одной точкой, а буква «э» набором из пяти символов «..—..»?

427. В примере 3 и в задании 425 были найдены вероятности того, что наугад выбранная буква абзаца этого пункта окажется буквой «а», «р», «е». Выполните аналогичные расчёты, взяв страницу своей любимой книги и заполнив таблицу.

Буква	**а**	**р**	**е**
Сколько раз она встретилась на странице (m)			
$P \approx \frac{m}{n}$, где n — общее количество букв на странице			

Выберите наугад букву (закрыв глаза и ткнув пальцем). Повторите этот эксперимент 100 раз. Сколько раз вы попали в букву «а», букву «р», букву «е»? Подтверждается ли найденная вами оценка вероятности?

428. Как вы думаете, почему буквы на клавиатуре компьютера расположены не в алфавитном порядке? Почему в разных местах расположена на русской и английской клавиатуре буква «о», одинаковая в этих двух алфавитах?

429. При контрольной оценке всхожести зёрен пшеницы из 1000 зёрен 27 оказались невсхожими. Какова вероятность, что наугад взятое зерно из этой же партии окажется всхожим?

430. Из коробки, в которой лежат десять шаров, наугад вынули один шар, а затем положили его обратно в коробку и перемешали шары. Этот эксперимент проделали 100 раз, и в результате 72 раза был вытащен белый, а 28 раз чёрный шар. Как вы думаете, сколько в коробке чёрных шаров?

! Контрольные вопросы и задания

1. На чемпионате мира по фигурному катанию в сильнейшей подгруппе женской произвольной программы выступают 6 спортсменок: по одной из России и США, по две из Канады и Японии. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность, что последней будет выступать спортсменка из Японии?

2. Подброшенный над столом спичечный коробок, упав, иногда остаётся стоять на своей грани, покрытой серой. Найдите экспериментально приближённое значение вероятности такого события.

28. Вычисление числа вариантов

Во многих случаях нахождение как числа всех возможных, так и числа благоприятных исходов сводится к подсчёту числа комбинаций, которые можно составить из элементов одного или нескольких множеств. Решением таких задач занимается специальный раздел математики — ***комбинаторика***. С ним вы начали знакомиться в основной школе.

Одно из основных правил комбинаторики — ***правило произведения***.

Если один из элементов комбинации можно выбрать n способами, каждому из которых соответствует m возможностей выбрать другой, то существует nm способов выбора этих двух элементов.

Пример 1. Из города A в город B можно доехать на поезде или на автобусе, а можно долететь на самолёте. Из города B в город C идут поезда, автобусы и теплоходы. Считая все маршруты равновероятными, найти вероятность поездки из A в C на одном виде транспорта.

Решение. Есть всего две возможности добраться из A в C, не меняя вида транспорта: на поезде или на автобусе.

Поездка из A в C состоит из двух этапов. И на первом, и на втором этапе есть по три возможности выбора вида транспорта. По правилу произведения находим число различных маршрутов $3 \cdot 3 = 9$.

По условию задачи все маршруты равновероятны, значит, вероятность поездки из A в C на одном виде транспорта равна $\frac{2}{9}$.

Ответ: $\frac{2}{9}$.

При подсчёте числа комбинаций необходимо знать, важен ли порядок, в котором размещаются элементы в комбинации, или комбинации различаются только составом своих элементов.

Пример 2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение. При записи пятизначного числа важно, в каком порядке идут его цифры. Первой можно записать любую из данных пяти цифр, вторую цифру можно присоединить к первой четырьмя способами, так как одну из данных цифр уже использовали. По правилу произведения выбор первых двух цифр можно осуществить $5 \cdot 4$ способами. Каждому из них соответствует 3 варианта присоединения третьей цифры, значит, первые три цифры можно записать $5 \cdot 4 \cdot 3$ способами. Четвёртой цифрой может оказаться любая из двух оставшихся, т. е. первые 4 цифры можно выбрать $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ способами. Выбор последней, пятой цифры предопределён выбором предшествующих, когда из пяти цифр выбрали четыре, осталась единственная цифра. Всего получилось $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ разных пятизначных чисел.

Ответ: 120 чисел.

Заметим, что каждое из этих чисел получается, например, из числа 12345 перестановкой его цифр.

Комбинации, которые получаются при перестановке элементов некоторого набора, так и называют ***перестановками***. А число всех перестановок, состоящих из n различных элементов, обозначают как P_n.

В задаче $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, а вообще, формула числа перестановок имеет следующий вид.

Формула числа перестановок из n элементов

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Пример 3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение. Рассуждаем так же, как в примере 2. Первой можно записать любую из данных 7 цифр. Вторую цифру можно присоединить к первой 6 способами, так как после выбора первой осталось шесть цифр. По правилу произведения выбор первых двух цифр можно осуществить $7 \cdot 6$ способами. Каждому из них соответствует 5 вариантов присоединения третьей цифры, значит, первые три цифры можно записать $7 \cdot 6 \cdot 5$ способами. Четвёртой цифрой может оказаться любая из 4 оставшихся, т. е. первые 4 цифры можно выбрать $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Последнюю, пятую цифру выбираем из оставшихся трёх. Всего получилось $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ разных пятизначных чисел.

По сути дела, при записи пятизначного числа размещались по определённым местам 5 из 7 данных элементов. Полученные при этом комбинации элементов так и называют ***размещениями***.

Число всех размещений из 7 различных элементов по 5 обозначают A_7^5 (читают: а из семи по пять).

$$A_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{2 \cdot 1} = \frac{7!}{(7-5)!}.$$

Формула числа размещений из n элементов по m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

З а м е ч а н и е. Размещение из n элементов по n является перестановкой этих n элементов, поэтому $A_n^n = P_n = n!$. Однако при $m = n$ в знаменателе правой части формулы числа размещений получается выражение 0!. Чтобы равенство $\frac{n!}{0!} = n!$ оставалось верным и в случае $m = n$, придётся считать, что $0! = 1$.

Определение факториала

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \text{ при } n = 2, 3, 4, \ldots \\ 1, \text{ при } n = 0, 1. \end{cases}$$

К решению задачи примера 2 можно подойти иначе. Вместо того, чтобы выбирать по одной цифре из 7, выберем сначала сразу все 5 цифр числа, не важно в каком порядке, и будем затем их переставлять. Обозначим число вариантов, которыми можно выбрать 5 цифр из 7, как C_7^5. Тогда каждому из этих вариантов соответствует P_5 перестановок выбранных цифр, а всего из данных 7 цифр можно будет составить $C_7^5 \cdot P_5$ пятизначных чисел. Должно получиться число размещений из 7 по 5: $C_7^5 \cdot P_5 = A_7^5$. Отсюда получаем число вариантов выбора 5 элементов из 7:

$$C_7^5 = \frac{A_7^5}{P_5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Выбирая 5 цифр из 7 данных, мы обращали внимание не на порядок выбора, а только на сочетание элементов, т. е. на то, какие элементы выбирали. Результат такого выбора называют ***сочетанием***.

Формула числа сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Пример 4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 составляются все возможные пятизначные числа, цифры которых не повторяются. Найти вероятность того, что случайным образом выбранное из них число окажется кратным 3.

Решение. Кратность числа трём определяется суммой цифр числа и не зависит от их порядка в его записи. Выборки пяти цифр из семи равновероятны и являются сочетаниями. Всего таких сочетаний $C_7^5 = 21$. Выберем из этих сочетаний те, сумма цифр которых кратна 3. Таких сочетаний 7: 12345, 13467, 23457, 12456, 12357, 12567 и 24567. По формуле вероятности получим $P = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 5. Привести к многочлену стандартного вида выражение $(a + b)^4$.

Решение. Представим четвёртую степень двучлена как произведение двучленов:

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b).$$

После раскрытия скобок (до приведения подобных слагаемых) должен получиться многочлен, каждый из членов которого является произведением четырёх множителей, выбираемых по одному из каждой скобки. При этом может получиться 5 различных одночленов: a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3 и b^4. Если во всех скобках выбрать первый член, то получится a^4, если же первый член выбрать только в третьей скобке, а в остальных трёх скобках — второй, то получится ab^3. Такие же одночлены получатся, если выбрать a только в первой, только во второй или только в четвёртой скобке. Значит, после раскрытия скобок образуется четыре одинаковых одночлена ab^3. После приведения подобных слагаемых они образуют член $4ab^3$. Коэффициент этого члена равен числу способов выбора одной скобки (в которой выбирается a) из четырёх.

Аналогично коэффициент одночлена с буквенной частью a^2b^2 окажется равным числу способов выбора двух скобок из четырёх.

Порядок выбора скобок роли не играет, важно лишь, из скольких скобок в одночлен идёт множитель a. Таким образом, речь идёт о сочетаниях. Как говорилось выше, одночлен a^4 получается при выборе всех четырёх скобок из четырёх, одночлен ab^3 — при выборе одной скобки из четырёх и т. д. Член b^4 получится, если ни в одной из скобок не брать a. После приведения подобных слагаемых каждый коэффициент многочлена стандартного вида окажется равным числу соответствующих сочетаний из четырёх элементов:

$$(a+b)^4 = C_4^4\,a^4 + C_4^3\,a^3b + C_4^2\,a^2b^2 + C_4^1\,ab^3 + C_4^0\,b^4.$$

По формуле числа сочетаний:

$$C_4^4 = \frac{4!}{4!\cdot 0!} = 1; \quad C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 3!}{3!\cdot 1} = 4;$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2} = 6.$$

Заметим, что $C_n^m = C_n^{n-m}$, так как при замене m на $n-m$ в формуле числа сочетаний меняется только порядок сомножителей в знаменателе дроби $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Значит, $C_4^1 = C_4^{4-1} = C_4^3 = 4$ и $C_4^0 = C_4^{4-0} = C_4^4 = 1$.

Окончательно имеем:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

В общем виде это равенство называют **формулой бинома Ньютона**, а коэффициенты многочлена в правой её части называют **биномиальными**.

Формула бинома Ньютона

$$\boldsymbol{(a+b)^n = C_n^n\,a^n + C_n^{n-1}\,a^{n-1}b + C_n^{n-2}\,a^{n-2}b^2 + \ldots}$$
$$\boldsymbol{\ldots + C_n^2\,a^2b^{n-2} + C_n^1\,ab^{n-1} + C_n^0\,b^n.}$$

Комбинаторика — раздел математики, рассматривающий вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов по тем или иным правилам. Комбинаторные задачи связаны с такими известными играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и др. Комбинаторика стала наукой в XVII в., когда возникла и теория вероятностей. Первые существенные шаги в разработке теории решения комбинаторных задач сделали французские учёные Блез Паскаль и Пьер Ферма. Не случайно, что для числа перестановок, числа размещений и числа сочетаний выбраны первые буквы французских слов *permutation* (перестановка), *arrangement* (размещение) и *combinaison* (сочетание). Комбинаторику как самостоятельную ветвь математики стал рассматривать знаменитый немецкий математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. книгу «Об искусстве комбинаторики».

Вы познакомились с тремя основными формулами комбинаторики, позволяющими находить число перестановок, размещений и сочетаний. Чтобы правильно выбрать формулу, нужно понять, важен или нет порядок следования элементов, т. е. изменится ли комбинация, если элементы выбирать в другом порядке. Если порядок выбора важен, то речь идёт о размещениях или перестановках, если нет, то о сочетаниях.

Упражнения

431. Из пункта A в пункт B ведут четыре дороги, а из пункта B в пункт C — три дороги. Сколько различных маршрутов, проходящих через B, ведёт из пункта A в пункт C?

432. Из карточной колоды, в которой 52 карты, наугад вынимают две карты. Какова вероятность того, что:
1) только одна из карт: а) бубна; б) туз; в) картинка;
2) обе эти карты: а) бубны; б) тузы; в) картинки;
3) хотя бы одна из карт: а) бубна; б) туз; в) картинка?

433. Игральную кость бросают два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших очков окажется: 1) простым числом; 2) чётным числом; 3) числом, кратным 3?

434. Бросают три игральные кости. С какой вероятностью сумма выпавших очков будет равна: 1) 3; 2) 8; 3) 11?

435. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что: 1) орёл не выпадет ни разу; 2) орёл выпадет точно один раз; 3) орёл выпадет ровно два раза; 4) орёл выпадет ровно три раза?

436. Сколькими способами четыре девушки могут разбиться на команды для парной игры в теннис?

437. Сколькими способами 6 школьников можно разделить: 1) на две равные по численности группы; 2) на группы, в одной из которых 2, а в другой 4 школьника?

438. В кошельке 8 монет: 2 пятирублёвых и 6 рублёвых. Из кошелька случайным образом достают 3 монеты. С какой вероятностью в кошельке останется 9 р. монетами? Ответ дайте с точностью до 0,01.

439. В кошельке 8 монет: 2 пятирублёвых и 6 рублёвых. Из кошелька случайным образом достают 4 монеты. С какой вероятностью в кошельке останется 8 р. монетами? Ответ дайте с точностью до 0,01.

440. В автобусе 20 мест.

1) Сколькими способами:

а) три пассажира могут занять места в этом автобусе;

б) 20 пассажиров можно рассадить в этом автобусе?

2) С какой вероятностью при случайной рассадке пассажиров в автобусе Саша и Коля окажутся соседями, если места в автобусе сгруппированы по 2?

441. Николай, Александр и ещё 9 юношей случайным образом выстраиваются в линейку. С какой вероятностью Николай и Александр окажутся соседями?

442. На плоскости отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

443. Сколько существует точек попарного пересечения диагоналей выпуклого 17-угольника, если никакие три из диагоналей не проходят через одну точку?

444. Сколькими способами 22 ученика спортшколы могут разбиться на команды для игры в футбол (в каждой команде должно быть по 11 игроков)?

445. Сколькими способами 22 ученика спортшколы могут разбиться на команды для игры в футбол, если только двое могут стоять в воротах?

446. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают сначала одну карту, а затем другую. Какова при этом вероятность того, что: 1) обе карты будут одной масти;

Глава 6

ПОВТОРЕНИЕ

В заключительной главе учебника систематизируются знания о свойствах функций и преобразованиях их графиков.

Вы познакомитесь также с обратными тригонометрическим функциями — последним классом функций, изучаемых в школьном курсе математики.

29. Функции и графики

Понятие функции начало складываться ещё в XVII в. В начале функциями называли обычные алгебраические выражения с переменными — собственно, это сегодня они обычные, а тогда Декарт только-только ввёл само понятие переменной. Впрочем, и сейчас никто из математиков не удивится, услышав выражения типа «функция x^2» или «сумма функций $\sin x$ и $\cos x$», — всем понятно, что в первом случае речь идёт о функции $y = x^2$, а во втором — о сумме функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, т. е. о функции

$$y = \sin x + \cos x.$$

Существенное развитие понятие функции получило в XX в. в связи с разработкой теории множеств — стали рассматриваться не только знакомые вам числовые функции, но и функции, в которых переменные y и x принимают значения из произвольных множеств.

Область определения функции

За время изучения математики вы познакомились с различными функциями. Каждая функция имеет *область определения* — множество значений, которые может принимать её аргумент. Наиболее часто приходится находить *естественную область определения* функции, заданной аналитически, т. е. с помощью математического выражения $f(x)$.

Естественная область определения функции $y = f(x)$ состоит из всех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Упражнение

452. Найдите область определения функции $y = f(x)$, если $f(x)$ равно:

1) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$;
2) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$;
3) $\sqrt{5x^2+13x+8}$;
4) $(4x^2-7x+3)^{\frac{3}{5}}$;
5) $\lg\dfrac{2x+1}{x-1}$;
6) $\lg\dfrac{x-2}{4x-1}$.

Область значений функции

Каждому значению аргумента из области определения соответствует единственное значение функции. Все значения, которые принимает функция, составляют её *область значений* (иногда можно встретиться с термином *область изменения функции* или *множество значений функции*).

Упражнение

453. Укажите область значений функции:

1) $y = 2x - 17$;
2) $y = \dfrac{5}{x}$;
3) $y = x^2 - 14x + 33$;
4) $y = 10x - x^2 - 21$;
5) $y = 2\cos x$;
6) ● $y = 2^{x+2}$;
7) ● $y = 12\cos x - 4\cos^2 x - 5$;
8) ● $y = 0{,}5^{x^2-4x+3}$;
9) ● $y = 2\sqrt{3-2x-x^2}$;
10) * $y = 3^x + 3^{-x}$.

Непрерывность функции

Важным свойством, которым обладают многие функции, является *непрерывность*. В учебнике уже упоминалось, что функция непрерывна, если её график можно провести, не отрывая карандаш от бумаги.

Графики некоторых функций состоят из нескольких непрерывных ветвей. Говорят, что такие функции непрерывны на соответствующих числовых промежутках.

Упражнение

454. Укажите промежутки непрерывности функции:

1) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$;

2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

3) $y = \sqrt{\sin x}$;

4) $y = \dfrac{1}{5-5^{\sin x}}$.

Изученные вами функции $y = f(x)$, в записи которых нет целой или дробной части ($[x]$, $\{x\}$), называются ***элементарными***. Полезно помнить, что ***любая элементарная функция непрерывна на любом промежутке из её области определения***.

Важное свойство непрерывной функции — сохранение знака на промежутках области определения, на которых она не обращается в нуль. На этом свойстве непрерывных функций основано решение неравенств методом интервалов.

Упражнение

455. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2x+1}{(x+3)(x-5)} > 0$;

2) $\dfrac{4x^2-1}{x+3} < 0$;

3) $\dfrac{\log_{0,5} x + 2}{(x-3)(x+5)} \geqslant 0$;

4) $\dfrac{4-2^{3-x}}{x^2-1} \geqslant 0$;

5) $\dfrac{0,5^x-2}{\cos x} > 0$;

6) $\dfrac{\sin x}{3^{2x-1}-1} < 0$.

Монотонность функции

Часто при решении неравенств используют свойство монотонности, т. е. возрастания или убывания функции.

Некоторые функции возрастают или убывают на всей своей области определения — их называют, соответственно,

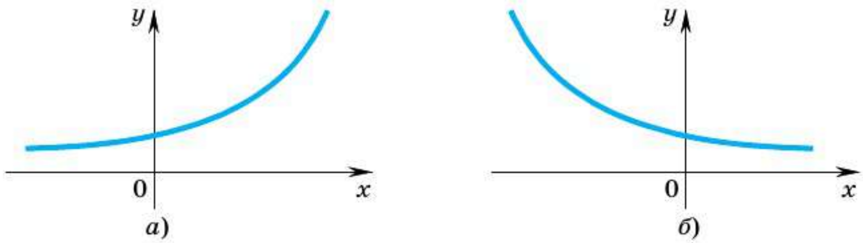


Рис. 109

возрастающими или *убывающими*. На рисунке 109 изображены эскизы возрастающей (109, *а*) и убывающей (109, *б*) функций.

Упражнение

456. Решите неравенство:

1) $3^{x^2+x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4+3x-x^2}$;

2) $\log_{0,5}(x+1) > \log_{0,25}(x^2-x+4)$;

3) $\log_x \frac{x+4}{2x-1} > 1$;

4) $\log_{\frac{x+4}{x+1}}(x-5) < 1$.

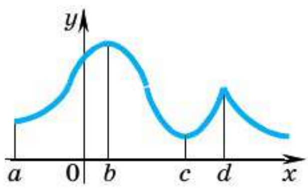


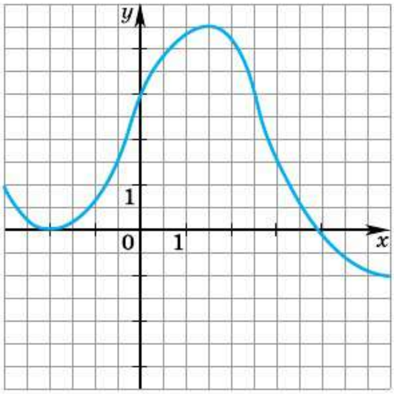
Рис. 110

Многие функции на одних промежутках возрастают, а на других убывают (рис. 110).

Упражнение

457. Укажите промежутки возрастания и убывания функций, заданных графиками:

1) рис. 110;   2) рис. 111, *а*;   3) рис. 111, *б*.



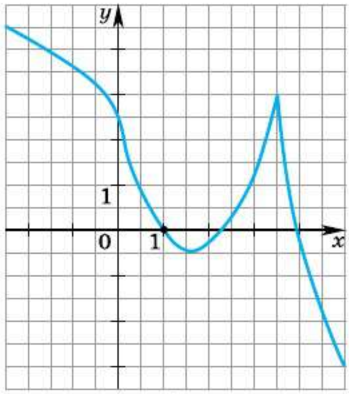


Рис. 111

Знание свойств конкретных функций часто позволяет сделать вывод о монотонности более сложных функций.

Докажем, например, что функция $y = x^2 - \log_{0,5} x - 7$ возрастает на всей своей области определения, т. е. на промежутке $(0; +\infty)$.

Пусть $0 < x_1 < x_2$, тогда

1) в силу возрастания функции $y = x^2$ на промежутке $(0; +\infty)$:

$$x_1^2 < x_2^2; \tag{1}$$

2) по правилам действий с неравенствами вычтем из обеих частей верного неравенства (1) число 7:

$$x_1^2 - 7 < x_2^2 - 7; \tag{2}$$

3) в силу убывания логарифмической функции с основанием 0,5 имеем:

$$\log_{0,5} x_1 > \log_{0,5} x_2; \tag{3}$$

4) по правилам действий с неравенствами умножим верное неравенство (3) на -1:

$$-\log_{0,5} x_1 < -\log_{0,5} x_2; \tag{4}$$

5) по правилам действий с неравенствами сложим верные неравенства одного смысла (2) и (4):

$$x_1^2 - 7 - \log_{0,5} x_1 < x_2^2 - 7 - \log_{0,5} x_2.$$

Таким образом, при $0 < x_1 < x_2$ выполняется неравенство $y(x_1) < y(x_2)$, а значит, функция возрастает, что и требовалось доказать.

Упражнения

458. Докажите, что функция $y = -\dfrac{2}{5^{2-x}}$ является убывающей.

459. Среди следующих функций укажите возрастающие и убывающие. Объясните, как вы сделали свой вывод:

1) ○ $y = 0{,}5^{5-x} + \sqrt{x-2}$;

2) ○ $y = \log_2(3-x) + \dfrac{1}{\sqrt{x+7}}$;

3) ● $y = (x+1)\sqrt{x-1}$;

4) ● $y = (x-1)\sqrt{x-1}$;

5) ● $y = x^2 + \lg(-2-x)$;

6) ● $y = (x^2 - 16) \cdot \lg(-2-x)$.

460. ○ Укажите промежутки возрастания и убывания следующих функций. Найдите их наибольшие и наименьшие значения, если они существуют:

1) $y = \dfrac{8}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$;

2) $y = 0{,}2^{x^2 - 4x + 2}$;

3) $y = -\dfrac{3}{\sqrt{4 - 3x - x^2}}$;

4) $y = \log_7(x^2 + 6x + 11)$;

5) ● $y = 3^{1 - \cos x}$;

6) ● $y = 0{,}3^{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

461. * Функция $y = f(x)$ задана своим графиком:

1) рис. 111, *а*;
2) рис. 111, *б*.

Зная, что $g(x) = \sqrt{f(x)}$ и $h(x) = \dfrac{1}{\lg f(x)}$, найдите:

а) область определения функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$;

б) область значений функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$;

в) промежутки возрастания и убывания функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$;

г) наибольшие и наименьшие значения функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$, если они существуют.

462. Подберите корень уравнения и докажите, что он единственный:

1) ○ $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$;

2) ○ $\log_4(4^{-x} + 3) = x + 1$;

3) $0{,}5^{x+1} - \sqrt{x+7} = x + 5;$

4) $\sqrt{x-10} + \sqrt{14+x} = \frac{12}{x-9};$

5) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \sqrt{3x+1} = x - 4;$

6) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 11 + 2x - 3x^2;$

7) $\sin\frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2;$

8) $\log_2 x + \log_x 2 = 2 - \sqrt{x-2};$

9) $5^x + 5^{-x} = 2\cos\left(\frac{5x^2 - 4x}{9}\right).$

Обратимость функции

Равенство $y = f(x)$, задающее функцию y, удобно для нахождения значения y по данному значению x. Часто, однако, приходится решать *обратную* задачу — находить значения аргумента, при которых функция принимает то или иное значение.

Если каждое своё значение функция y принимает по одному разу, т. е. только при каком-то одном значении аргумента x, то, выражая x из равенства $y = f(x)$, мы получим равенство $x = g(y)$, задающее функцию x.

Однако в школьной математике функцию обычно обозначают буквой y, поэтому переменные в равенстве $x = g(y)$ переименовывают и получают функцию $y = g(x)$, *обратную* для функции $y = f(x)$.

С этим переименованием связано свойство симметрии графиков *взаимно обратных* функций относительно прямой $y = x$. Действительно, функция $x = g(y)$ *имеет тот же самый график, что и функция* $y = f(x)$, а графики $x = g(y)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 112).

Функцию, имеющую обратную, называют ***обратимой***. Так, например, обратима каждая из взаимно обратных функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$.

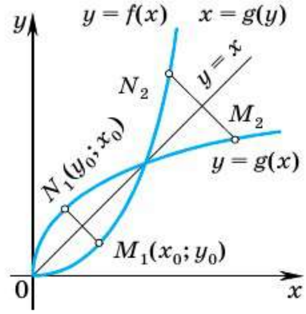


Рис. 112

Чтобы функция была обратимой, каждое своё значение она должна принимать один раз. Так, обратима любая монотонная функция, поскольку каждое своё значение она принимает один раз.

Некоторые функции не обладают свойством обратимости, поскольку одно и то же значение принимают при различных значениях аргумента. Так, например, значение 1 функция $y = x^2$ принимает при двух значениях аргумента: $x = 1$ и $x = -1$, а функция $y = \sin x$ при любом $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Чтобы получить функцию, обратную функции $y = x^2$, последнюю рассматривают на промежутке $[0; +\infty)$, на котором она, во-первых, принимает все свои значения и, во-вторых, монотонна, и, следовательно, обратима. Как вы знаете, обратной функцией для неё является функция $y = \sqrt{x}$.

Точно так же, ограничивая область определения функции $y = x^n$ при чётном n, получают обратную ей функцию $y = \sqrt[n]{x}$.

Свойства взаимно обратных функций

1) Область определения одной из них является областью значений другой.

2) Если одна из них возрастающая (убывающая), то и другая, соответственно, возрастающая (убывающая).

3) Если прямая $x = a$ служит вертикальной асимптотой одной, то другая имеет горизонтальную асимптоту $y = a$.

Обратные тригонометрические функции

Функция $y = \arcsin x$

Чтобы сделать обратимой функцию $y = \sin x$, нужно рассмотреть её на промежутке, где она, во-первых, принимает все свои значения и, во-вторых, монотонна.

Естественно взять наиболее близкий к нулю промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

На этом промежутке функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию $y = \arcsin x$ (рис. 113).

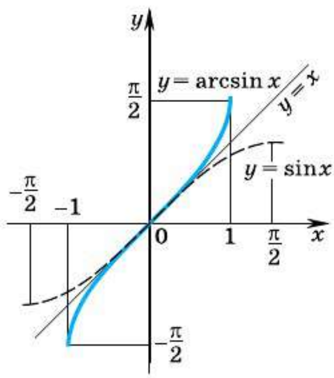


Рис. 113

Перечислим её **свойства**:

1) область определения — отрезок $[-1; 1]$;

2) область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) функция непрерывна и является возрастающей.

Функция $y = \arccos x$

Функция $y = \cos x$ убывает и принимает все свои значения на промежутке $[0; \pi]$. Здесь она имеет обратную функцию $y = \arccos x$ (рис. 114), которая определена, непрерывна и убывает на промежутке $[-1; 1]$. Область значений функции $y = \arccos x$ — отрезок $[0; \pi]$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает и принимает все свои значения на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Здесь она имеет обратную функцию $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 115), которая определена, непрерывна и возрастает на всей числовой прямой.

Область значений функции $y = \operatorname{arctg} x$ — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

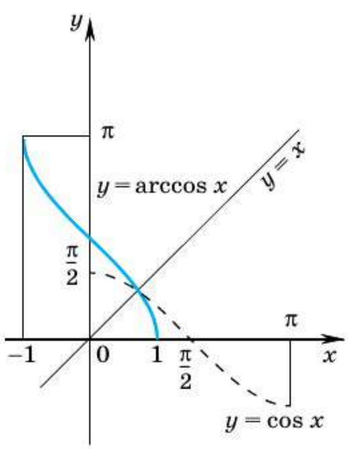


Рис. 114

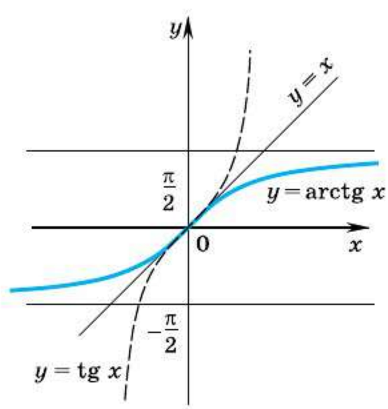


Рис. 115

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает и принимает все свои значения на промежутке $(0; \pi)$. Здесь она имеет обратную функцию $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 116), которая определена, непрерывна и убывает на всей числовой прямой. Область значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$ — интервал $(0; \pi)$.

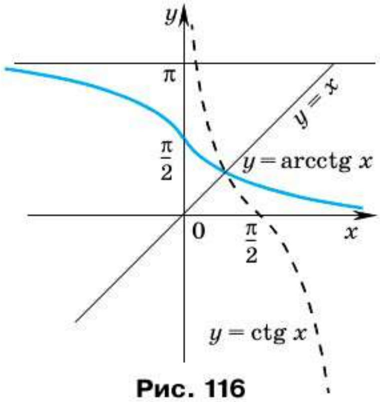


Рис. 116

Упражнения

463. Найдите значение функции:

1) $y = \arcsin x$, если x равен:

а) $0{,}5$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в)○ $\sin\frac{5\pi}{7}$; г)● $\sin 10$;

2) $y = \arccos x$, если x равен:

а) $-0{,}5$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в)○ $\cos\frac{5\pi}{4}$; г)● $\cos 10$;

3) $y = \operatorname{arctg} x$, если x равен:

а) $\sqrt{3}$; б) -1; в)○ $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$; г)● $\operatorname{tg} 7$;

4) $y = \operatorname{arcctg} x$, если x равен:

а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1; в)○ $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{5}$; г)● $\operatorname{ctg} 7$.

464.● Решите неравенство:

1) $-\frac{\pi}{6} < \arcsin(x^2 - 1{,}5x) \leqslant \frac{\pi}{6}$;

2) $6\arccos^2 x + 7\arccos x < 3$.

Чётность и нечётность функции

Иногда преобразование переводит график функции сам в себя. Так, например, поскольку значение чётной функции не изменяется при перемене знака у аргумента:

$$f(-x) = f(x),$$

график чётной функции оказывается симметричен относительно оси ординат.

Значение нечётной функции при перемене знака у аргумента свой знак меняет:

$$f(-x) = -f(x),$$

поэтому график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Понятно, что область определения и чётной, и нечётной функции должна быть симметрична относительно нуля.

Упражнения

465. Задайте аналитически какую-нибудь функцию, имеющую тот же самый график, что и обратная ей. Может ли возрастающая функция, отличная от функции $y = x$, иметь тот же самый график, что и обратная ей?

466. Определите, какие из следующих функций чётные, какие нечётные, а какие не являются ни чётными, ни нечётными:

1) $y = x + \sin x$;
2) $y = \sin x \cdot \cos x$;
3) $y = x^2 + \cos x$;
4) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

Какие можно сделать выводы о чётности или нечётности:

а) суммы двух чётных функций;
б) суммы двух нечётных функций;
в) произведения двух чётных функций;
г) произведения двух нечётных функций;
д) произведения чётной и нечётной функций с одинаковыми областями определения?

467. Дополните графики на рисунке 117 так, чтобы они стали задавать: 1) чётные; 2) нечётные функции.

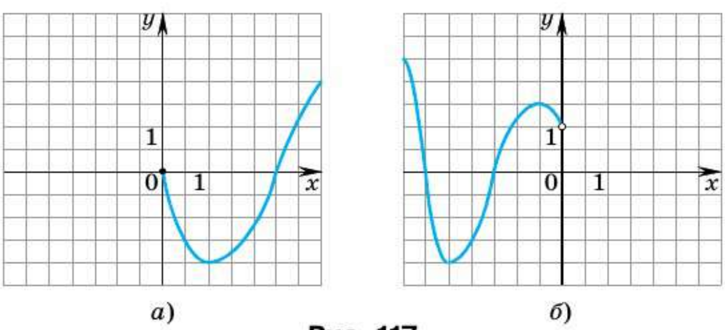


Рис. 117

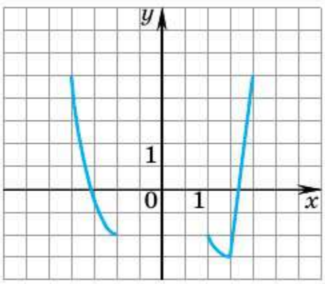
Периодичность функции

Если при сдвигах графика функции параллельно оси абсцисс вправо и влево на некоторое расстояние он переходит сам в себя, то функция является ***периодической***. Расстояние, на которое переносится график, называют ***периодом*** функции.

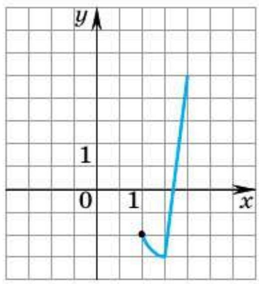
Рассматривая периодические функции, обычно указывают их наименьший период. Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период 2π, период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π. Периодична также и функция $y = \{x\}$ — её наименьший период равен 1.

Упражнения

468. Достройте график функции, зная, что:
1) её период равен 2 (рис. 118, *а*);
2) её период равен 2, и она чётная (рис. 118, *б*).



а)



б)

Рис. 118

Преобразование графиков

Симметрии и параллельный перенос, о которых упоминалось в связи со свойствами чётности, нечётности и периодичности функций, вместе с некоторыми другими преобразованиями часто используются при построении графиков функций и графиков уравнений. Для графика уравнения отсутствие различных точек с одинаковыми абсциссами не является обязательным, например, окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2, не является графиком функции, но является графиком уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

Основные преобразования графиков

№	Переход		Описание преобразования
	от графика	к графику	
1	$y = f(x)$	$y = f(x) + b$	Перенос параллельно оси ординат на b
2	$y = f(x)$	$y = f(x - a)$	Перенос параллельно оси абсцисс на a
3	$y = f(x)$	$y = kf(x),\ k > 0$	Растяжение от оси абсцисс в k раз
4	$y = f(x)$	$y = f(kx),\ k > 0$	Сжатие к оси ординат в k раз
5	$y = f(x)$	$y = -f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс
6	$y = f(x)$	$y = -f(-x)$	Симметрия относительно начала координат
7	$y = f(x)$	$y = f(-x)$	Симметрия относительно оси ординат
8	$y = f(x)$	$x = f(y)$	Симметрия относительно прямой $y = x$
9	$y = f(x)$	$y = \lvert f(x) \rvert$	Симметрия относительно оси абсцисс частей графика, расположенных в нижней полуплоскости
10	$y = f(x)$	$y = f(\lvert x \rvert)$	Уничтожение части графика слева от оси ординат и *дублирование* оставшейся части симметрично относительно оси ординат
11	$y = f(x)$	$\lvert y \rvert = f(x)$	Уничтожение части графика под осью абсцисс и *дублирование* оставшейся части симметрично относительно оси абсцисс

Упражнения

469. 1) Какие недостатки вы видите в описании преобразований 3 и 4 в таблице?

2) Что происходит с расстояниями от точки графика до осей абсцисс и ординат при этих преобразованиях?

470. Проиллюстрируйте каждое из указанных в таблице преобразований конкретными примерами построения графика функции.

471. 1) Какой график вы будете преобразовывать при построении графика уравнения:

а) $y = (2x + 1)^2$; в) $y = \dfrac{2x - 3}{4x}$;

б) $y = \dfrac{3 - 2x}{x}$; г) $y = \log_{0,5}(2 - 4|x|)$?

2) В каком порядке вы будете применять указанные в таблице преобразования?

472. Преобразуйте график функции $y = f(x)$ (рис. 119) в график уравнения:

1) $y = f(|x| + 1)$; 3) $y = |f(x)| - 1$;

2) $y = f(|x + 1|)$; 4) $y = |f(x) + 1|$.

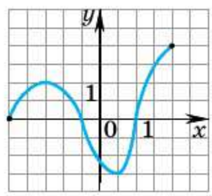


Рис. 119

473. Задайте аналитически какую-нибудь функцию, график которой симметричен относительно:

1) прямой $x = 2$; 2) точки $A(-2; 3)$.

474. Используя идею преобразования графика, найдите наименьший период следующих функций:

1) $y = \cos 3x$; 3) $y = \operatorname{tg}(4x + 1)$;

2) $y = \sin \dfrac{x}{5}$; 4) $y = \{0,5x - 4\}$.

475. 1) Что произойдёт с графиком уравнения с двумя переменными, если в уравнении заменить:

а) x на $-x$; в) x на $x + 3$; д) x на $2x$;

б) y на $-y$; г) y на $y - 3$; е) y на $0,5y$?

2) Проиллюстрируйте эти преобразования на примере уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите знакомые вам свойства функций и проиллюстрируйте их эскизами графиков соответствующих функций.

2. Верны ли следующие утверждения о функциях с одинаковыми областями определения: а) сумма двух возрастающих функций — возрастающая функция; б) произведение двух убывающих функций — убывающая функция; в) разность двух чётных функций — чётная функция; г) произведение двух нечётных функций — нечётная функция. Если вы считаете утверждение верным, постарайтесь его обосновать, если неверным — приведите контрпример.

3. Постройте график функции $y = \left|2\cos\left(0{,}5x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ с помощью преобразований. Укажите наименьший период, наибольшее и наименьшее значения, промежутки монотонности данной функции.

30. Уравнения и неравенства

Уравнения и неравенства люди решают с глубокой древности. Вы познакомились с уравнениями и неравенствами ещё в начальной школе и с тех пор научились решать много разных их типов. В большинстве случаев в процессе решения исходное уравнение или неравенство заменяется более простым и так далее, пока не будет приведено к простейшему виду.

476. Решите уравнение:

1) $(x+6)^9 = 512$;

2) $\sqrt{51-5x} = 6$;

3) $\log_2(4-x) = 7$;

4) $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 24$;

5) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$;

6) $\frac{2\sin x - \sqrt{3}}{2\cos x + 1} = 0$;

7) $\log_7(9+x) = \log_7 2$;

8) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$;

9) $\frac{2-6x}{3-x} - \frac{3x+4}{x-3} = 3$;

10) $\frac{x-4}{x+4} + \frac{16x}{x^2-16} = \frac{x+4}{x-4}$.

477. Решите уравнение с модулем:

1) $|x-3| = 2$;

2) $|2x-5| = x-1$;

3) $\left|\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right| = x-1$;

4) $|2x-5| = 2-x$.

478. Решите неравенство:

1) $\frac{2(4-x)}{1-3x} > 0$;

2) $\frac{4-2x}{1+3x} > 0$;

3) $8^{2x+1} > 0{,}125$;

4) $\log_{0,5}(2-x) > -1$;

5) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$;

6) $\frac{5-x}{8} + \frac{3-2x}{4} \geqslant 0$;

лосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

4) Велосипедист проехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние до которого 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 ч. В результате на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

5) Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Прибыв в 13 ч 20 мин в пункт B, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

6) Смешав 14%-й и 82%-й растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 22%-й раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-го раствора той же кислоты, то получили бы 42%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 14%-го раствора использовали для получения смеси?

! Контрольные вопросы и задания

1. Приведите два примера равносильных и два примера неравносильных преобразований уравнений и неравенств.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{6x+57}=9$; б) $\log_3(6-5x)=2\log_3 5$.

3. Решите неравенство:

а) $\log_{2x+3} x^2 < 1$; б) $(2x-3)\sqrt{3x^2-5x-2} > 0$.

ДОМАШНИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1 (к пп. 1—4) (90 мин)

I уровень

1. Является ли y функцией x, если:

1) y — число учеников вашего класса, посетивших урок математики, а x — число учеников вашего класса, подготовившихся к этому уроку;

2) y — число учеников вашего класса, посетивших школу, а x — соответствующее число сентября;

3) x — натуральное число, а y — число, квадрат которого равен x;

4) x — натуральное число, а y — квадрат числа x?

Является ли в этих примерах x функцией y?

2. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 120). Найдите по графику:

1) область определения функции;

2) область значений функции;

3) промежутки возрастания и убывания;

4) значение x, при котором значение функции равно 3;

5) $f(-2)$;

6) нули функции;

7) наибольшее и наименьшее значения функции.

Задаёт ли этот график x как функцию y?

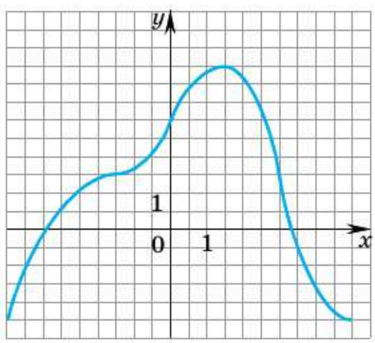


Рис. 120

3. Постройте график какой-нибудь непрерывной функции $y = f(x)$, если:

$D(f) = (-4;\ 3]$, её наибольшее значение равно 3, а наименьшее -2, функция убывает на промежутке $(-4;\ 1]$, а возрастает на промежутке $[1;\ 3]$.

4. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2x - 3}}$; 2) $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x + 3}$.

5. Разрывна ли кусочно-заданная функция

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \leqslant 1, \\ 2 - x, & \text{при } x > 1? \end{cases}$$

Постройте её график.

6. С помощью каких преобразований из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ можно получить график дробно-линейной функции $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$? Постройте её график.

II уровень

7. Определите с помощью графика, сколько корней имеет уравнение $\sqrt{1 - x} - x^2 - x + 1 = 0$.

8. Решите уравнение $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 5} = 11$.

III уровень

9. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 6x + 9}}.$$

10. Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| + 4$.

Контрольная работа № 2 (к пп. 5—8) (60 мин)

I уровень

1. Докажите нечётность функции

$$y = \sqrt{x^2 - 9} \cdot (x^5 - x).$$

2. Постройте в одной системе координат графики функции $y = 3 - 2x$ и функции, ей обратной.

3. Решите уравнение:

1) $\sqrt[5]{x^3+5}=2$;   2) $\sqrt{2x^2+(4x-5)}=x-2$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt[6]{11+9x-2x^2}}{x-3}\geqslant 0$.

5. Сравните значения выражений $\sqrt[6]{6}$ и $\sqrt[4]{4}$.

6. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}$;   2) $\dfrac{b-4x^{0,5}}{b^{0,5}x^{0,5}+2x^{0,75}}$.

II уровень

7. Задайте аналитически функцию $y=g(x)$, обратную функции $y=3-2x$.

8. Решите уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2$.

9. Решите неравенство $\sqrt{3x+7}\geqslant x+1$.

III уровень

10. Упростите выражение

$$\left((xy)^{\frac{1}{2}}-\frac{xy}{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{2}}}{x-y}.$$

Контрольная работа № 3 (к пп. 9—11) (90 мин)

I уровень

1. Найдите значение a, если известно, что график функции $y=a^x$ проходит через точку $M(-0,25; 2)$.

2. Решите уравнение:

1) $\log_2 x-\log_{0,5}(x-2)=3$;   2) $11^{x+2}-22\cdot 11^x=9$.

3. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2^x-0,25}{3+x}>0$;   2) $\log_{0,2}(x+3)>-2$.

II уровень

4. Решите уравнение:

1) $2^x+\dfrac{5}{2^{x-2}}-9=0$;   2) $x^{\log_3 x}=81$.

5. Решите неравенство:

1) $\log_{x-2}(5-x) > 0$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

III уровень

6. Решите неравенство $\log_2(2+x) > 1-x$.

7. 1) На сколько процентов возрастёт вклад в банке за два года, если банк ежемесячно начисляет 3% ?

2) Найдите сумму, которая окажется на вкладе через два года, если начальный вклад составил 10 000 р.

Контрольная работа № 4 (к пп. 12—20) (50 мин)

I уровень

1. Переведите $1{,}25\pi$ из радианной меры в градусную.

2. Переведите $-150°$ из градусной меры в радианную.

3. Постройте угол, косинус которого равен $\frac{2}{3}$. Выполните измерения с помощью транспортира и запишите общий вид углов, имеющих данный косинус.

4. Приведите к функциям углов от 0° до 45°:

а) $\sin(-252°)$; б) $\cos 1130°$.

5. Используя график функции $y = \sin x$, укажите промежутки, на которых функция: 1) возрастает; 2) принимает положительные значения.

6. Найдите корни уравнения $2\sin(x-1) = -\sqrt{2}$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

II уровень

7. Для каких углов от 0 до 2π выполняется неравенство $\sin\varphi > \operatorname{tg}\varphi$?

8. Найдите угол, который образует с осью ординат прямая, пересекающая оси координат в точках $A(-2;\ 0)$ и $B(0; \sqrt{12})$.

III уровень

9. Решите уравнение $4\cos^2 x - \cos x - 5 = 0$.

10. Чему равен $\arcsin(\sin 5)$?

Контрольная работа № 5 (к пп. 21—26) (60 мин)

I уровень

1. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$,

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

2. Вычислите $\dfrac{\sin 70^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cos 15^\circ - \sin 10^\circ \sin 15^\circ}$.

3. Докажите тождество $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$.

4. Найдите все корни уравнения $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

II уровень

5. Найдите абсциссы общих точек графиков функций

$$y = \cos x \text{ и } y = \cos 2x.$$

6. Можно ли утверждать, что если α° — острый угол, то

$$\sin(\alpha^\circ + 1^\circ) > \sin\alpha^\circ?$$

7. Вычислите:

$$\log_{0,1} \operatorname{ctg} 5^\circ + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 15^\circ + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 25^\circ + \ldots$$
$$\ldots + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 75^\circ + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 85^\circ.$$

III уровень

8. Докажите, что угол между прямыми $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{3}x + 3$ равен 45°.

9. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

10. При каких значениях a наибольшее значение функции $y = a\sin x + \cos x$ равно 5?

Контрольная работа № 6 (к пп. 27, 28) (60 мин)

I уровень

1. Эксперимент провели 1000 раз и в 5 из них произошло событие A.

1) Каким является событие A: вероятным, достоверным, невозможным или маловероятным?

2) Чему примерно равна вероятность события A?

2. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет 10 очков?

3. Вычислите $\frac{20!}{18!}$.

II уровень

4. Сколько существует пятизначных чисел:
1) составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 7;
2) составленных из этих цифр и кратных 3?

5. Сколько разных составов может иметь комитет, состоящий из двух мужчин и трёх женщин, если его избирают из 5 мужчин и 7 женщин?

6. Упростите выражение $\frac{1}{k!} - \frac{k^2 + k}{(k+2)!}$.

III уровень

7. Сколькими способами можно выбрать стартовую шестёрку баскетболистов из команды в 12 человек? Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если Иванов и Петров обязательно должны входить в стартовый состав?

8. Найдите коэффициент члена 5-й степени многочлена стандартного вида, к которому приводится $(2 + x)^9$.

Итоговая контрольная работа (90 мин)

I уровень

1. Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{4}} - 3\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$.

2. Упростите выражение $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{a^{\frac{1}{3}} - 4} - a^{\frac{1}{3}}$.

3. Упростите выражение

$$2^{\log_2 7} + \log_5 75 - \log_5 3.$$

4. Решите неравенство

$$(0{,}25)^{x-3} < \frac{1}{16}.$$

5. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$, заданной графиком (рис. 121).

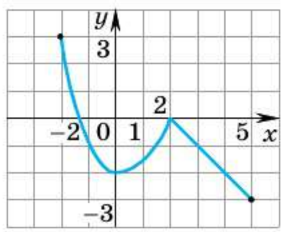


Рис. 121

6. Упростите выражение

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

7. Решите уравнение $\log_2 (x + 1) = 4$.

8. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 1}}.$$

9. Решите уравнение $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$.

II уровень

10. Решите уравнение $\sqrt{2x + 7} + x = 2$.

11. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}$.

12. Решите уравнение $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$.

13. Решите уравнение $2 \sin^2 x = |\sin x|$.

III уровень

14. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_2 (4x - a) = x$ имеет единственный корень.

15. Найдите наименьшее и наибольшее из значений на отрезке $[1; 4]$, которые принимает функция

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 8x + 11}}.$$

ОТВЕТЫ

Глава 1

Функции и графики

2. 1)—3) Нет.

3. y является функцией x, так как каждому числу x соответствует единственная цифра в разряде десятых; x не является функцией y, так как одну и ту же цифру в разряде десятых могут иметь разные числа.

4. y не является функцией x, так как одна и та же сумма цифр может быть у разных двузначных чисел, например сумма 7 у чисел 25 и 34; x является функцией y, так как каждому двузначному числу соответствует единственная сумма цифр.

5. 1) $y = 300 - 50x$. 2) Естественная область определения этой функции — множество действительных чисел, а реальная — натуральные числа от 1 до 6 включительно.

6. 1) а) 9; б) 0,5; 2) а) -7; б) 0,25; 3) а) 22; б) 0 и -3; 4) а) 26; б) 1 и -8.

7. 1) $D(f) = \{10; 11; \ldots; 98; 99\}$; 2) $f(17) = 8$, $f(35) = 8$, $f(59) = 14$; 3) $f(x) = 3$ при $x = 30$, $x = 21$ и $x = 12$; 4) $\max f(x) = f(99) = 18$, $\min f(x) = f(10) = 1$; 5) 9 и 10.

8. Ответы приближённые. Рис. 3: 1) $D(f) = [-3,5; 4,5]$; 3) $f(-2) = 2,8$; 4) $f(-2,2) = 3$; 5) $f(-0,25) = f(1,7) = 0$; 6) $\max f(x) = 4$, $\min f(x) = -3$; рис. 4: 1) $D(f) = [-2,4; 6,5]$; 3) $f(-2) = 3,2$; 4) $f(-1,9) = f(1,5) = f(3,5) = 3$; 5) $f(-1) = f(0,8) = f(5,8) = 0$; 6) $\max f(x) = 6$, $\min f(x) = -1,5$; рис. 5: 1) $D(f) = [-3; 5,5]$; 3) $f(-2) = 0$; 4) $f(0,2) = f(2,5) = 3$; 5) $f(-2) = f(3,9) = 0$; 6) $\max f(x) = 4,5$, $\min f(x) = -1$; рис. 6: 1) $D(f) = [-3; 6]$; 3) $f(-2) = 2,5$; 4) $f(-1,7) = f(-0,2) = f(4,6) = 3$; 5) $f(-2,8) = f(1) = f(3,8) = 0$; 6) $\max f(x) = 5$, $\min f(x) = -2,5$; рис. 7: 1) $D(f) = [-4,5; 5]$; 3) $f(-2) = 1,4$; 4) $f(0) = f(2,6) = 3$; 5) $f(-3,5) = f(3,3) = 0$; 6) $\max f(x) = 4,5$, $\min f(x) = -2,5$; рис. 8: 1) $D(f) = [-3; 6]$; 2) $f(-2) = -1$; 4) $f(3,5) = 3$; 5) $f(1,3) = 0$; 6) $\max f(x) = 4,5$, $\min f(x) = -3$.

12. $V = 4x(5-x)^2$, $D(V) = (0; 5)$.

15. 1) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$; 2) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}_+$; 3) $\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$; 4) $\boldsymbol{R}_+ \cap \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$.

19. 1) $k = 0{,}3$, а) $l = 7$; б) $l = 8$; в) $l = 4{,}4$; г) $l = 7{,}5$; 2) $k = 0{,}75$, а) $l = -5$; б) $l = 6$; 3) $k = -\frac{3}{7}$, а) $l = 7$; б) $l = \frac{9}{7}$.

21. 1) $k > 0$, $l > 0$; 2) $k < 0$, $l > 0$; 3) $k > 0$, $l < 0$; 4) $k < 0$, $l < 0$.

22. 1) Да, при $k = 0$, $l > 0$; 2) да, при $k < 0$, $l = 0$; 3) да, при $k = 0$, $l < 0$; 4) да, при $k > 0$, $l = 0$; 5) нет, график функции $y = kx + l$ не может быть параллелен оси ординат, поскольку при этом одному значению x соответствует более одного значения y; 6) нет.

23. 1) $y = -1{,}5x + 0{,}5$; 2) $y = \frac{9}{5}x + \frac{2}{5}$; 3) $y = 13{,}5$.

24. 1) а) $(0; 9)$ и $(-12; 0)$; б) принадлежит A, не принадлежат B и C; в) на графике есть точка с равными координатами; 2) а) $(0; -8)$ и $(-20; 0)$; б) принадлежит B, не принадлежат A и C; в) на графике есть точка с противоположными координатами.

25. 1) $l = -21$. Проходит; 2) $l = 16$. Не проходит.

26. 9 тыс. р.

28. 1) $k = 4$; 2) $k = -18$.

29. 1) Да; 2) да.

30. Принадлежат точки: 1) A и M; 2) A, B, C и P.

33. 1) Две, одну или ни одной; 2) одну.

34. 1) $y = 0{,}5x$; 2) $y = -0{,}5x - 1{,}5$; 3) $y = 1{,}5$.

35. 1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

36. 1) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$; 3) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 25$, где a — любое число; 4) $(x-a)^2 + (y+a)^2 = 25$, где a — любое число.

37. 1) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right)$ и $\left(-\frac{7}{5}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1)$, $\left(1; \frac{4}{3}\right)$ и $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

38. 1) 0; 3 и 5; 2) -7; -2 и 0.

41. 2) в) Разрыв при $x = 1$; г) разрыв при $x = 1$.

42. 3) Например, $y = \frac{1}{(x-2)(x-5)(x-9)}$.

44. 1) $(-8; 0) \cup (1; +\infty)$; 2) $x \leqslant -3$, $0 < x < 7$; 3) $y < -3$, $0 < y < \frac{2}{3}$, $y > 7$; 4) $-\frac{5}{3} \leqslant y \leqslant -1$, $\frac{6}{5} \leqslant y \leqslant 3$.

45. 1) $t \leqslant -\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{3} < t < -\frac{1}{3}$; 2) $z < -3$, $-\frac{1}{12} \leqslant z < \frac{5}{3}$; 3) $x < -1$, $-\frac{1}{3} < x < 1$; 4) $y < -2$, $-\frac{19}{17} \leqslant y < 3$.

46. 1) $x < -2$; 2) $x = -2$, $x \geqslant 2$.

47. Рис. 3: функция возрастает на промежутке [1; 3], убывает на промежутках [–3,5; 1] и [3; 4,5]; рис. 4: функция возрастает на промежутке [0; 2], убывает на промежутках [–2,5; 0] и [2; 6,5]; рис. 5: функция возрастает на промежутке [–2; 1,5], убывает на промежутках [–3; –2] и [1,5; 5,5]; рис. 6: функция возрастает на промежутках [–3; –1] и [2,5; 6], убывает на промежутке [–1; 2,5]; рис. 7: функция возрастает на промежутке [–4,5; 1,5], убывает на промежутке [1,5; 5]; рис. 8: функция возрастает на промежутках [–3; –2] и [0; 6], убывает на промежутке [–2; 0].

50. Возрастающими являются функции 1), 4), 5); убывающими — 2), 9).

52. 1) 4; 2) 10; 3) 7; 4) 25.

56. 1) (0; 6); 2) (0; –2); 3) (2; –3); 4) (–3; 14); 5) (2; 11); 6) (–2; 11); 7) (2,5; –12,5); 8) (–7; –24,5).

59. Должны выполняться условия: 3) $x_0 > 0$ и $D = 0$ или $x_0 > 0$ и $y(0) = 0$ или $y(0) < 0$; 5) $-1 < x_0 < 2$, $y(-1) \geqslant 0$, $y(2) \geqslant 0$, $D > 0$.

60. 1) а) $k > 4{,}5$; б) $k = 4{,}5$; в) таких значений k нет; 2) а) $k < -0{,}8$; б) $k = -0{,}8$; в) таких значений k нет.

61. $a > 0$.

62. 1)—4) Да.

63. 1) $\sqrt{53}$ и $\sqrt{34}$; 2) $\sqrt{2{,}5}$ и $\sqrt{0{,}5}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{7}}$ и 3; 4) $-\frac{6}{\sqrt{14}}$ и $-\frac{6}{\sqrt{5}}$.

65. $S = 4x - \frac{4x^2}{3}$, $D(S) = (0; 3)$, $E(S) = (0; 3]$.

66. 2) Уравнения асимптот: в) $y = 2$, $x = -1$; г) $y = -3$, $x = 1$.

Глава 2

Степени и корни

70. Существует для точек A, H, B и C.

71. 1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 3$; 4) $n = 4$ или $n = 2$; 5) $n = 2$ или $n = 4$; 6) $n = 2$, $n = 3$, $n = 6$; 7) $n = 3$.

72. 1) I, III; 2) I, II; 3) I, II, III; 4) I, II; 5) I, III, IV; 6) I, II.

73. а) Да, например: $a = 0$, $b = -1$ и $n = 2$; б) нет.

74. Чётным: 1), 2); нечётным: 3), 4); нельзя определить: 5), 6).

75. 1) $m < n$; 2) $m > n$; 3) $m > n$; 4) $m < n$; 5) нельзя определить.

76. 1) а) Симметрией относительно оси абсцисс; б) сжатием в 5 раз к оси абсцисс. 2) Все три функции имеют одинаковую чётность.

79. 1) а) Нечётная; б) чётная; в) нечётная; г) ни чётная, ни нечётная. 2) Точку разрыва имеют функции в) и г).

80. 1) $y = (4x^6 - 4) + (5x)$; 2) $y = \left(\frac{|x|}{x^6 - 1}\right) + \left(\frac{-2x^3}{x^6 - 1}\right)$.

81. а) Нет; б) нечётными являются произведение и частное чётной и нечётной функций.

82. 2) а) $y = -(|x| - 2)^2 + 5$, при $x \neq 0$. Функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $(0; 2]$, убывает на промежутках $[-2; 0)$ и $[2; +\infty)$ и имеет разрыв в точке 0.

б) $y = \begin{cases} 5 - (x-2)^2, \text{ где } x > 0, \\ (x+2)^2 - 5, \text{ где } x < 0 \end{cases}$ или $y = \frac{|x|}{x}(5 - (|x| - 2)^2)$. Функция возрастает на промежутках $[-2; 0)$ и $(0; 2]$, убывает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$ и разрывна в точке 0.

83. 1) — 4) Да.

84. 2) $\sqrt[3]{16}$; 3) $-\sqrt[5]{43}$; 6) 0; 7) 1,5; $\frac{11}{6}$; 8) -2; $-0,8$; 9) 0; 1; 4; 5; 10) 0; 1; 8; 9.

86. 1)—3) Принадлежит.

87. 1) $n = 5$; 2) $n = 7$.

88. 1) 2; 2) 3; 3) 3; 4) 2 и 4; 5) 2 и 4; 6) 2, 3 и 6; 7) 2, 5 и 10.

89. 1) $m > n$; 2) $m < n$; 3) $m < n$; 4) $m > n$.

90. 1) $y = x$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = 0,5x + 0,5$; 4) $y = 7,5 - 1,5x$.

92. Да: 1), 2), 5)—11); нет: 3), 4), 12).

93. 1) $-\sqrt[3]{7}$; 2) $-\sqrt[5]{6}$; 5) $-\sqrt[5]{\sqrt{2} - 1}$.

94. 1) $x \geqslant 0$; 2) $x > 0$; 3) x — любое число; 4) $x \neq 0$; 7) $x \geqslant 2,5$; 8) при всех x; 9) $-5 \leqslant x \leqslant 5$; 10) $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $x \geqslant \frac{1}{2}$; 11) $x \leqslant -9$, $x \geqslant 10$; 12) $-4 \leqslant x \leqslant 24$.

95. 1) $x < 0$, $x = 16$; 2) $x = -243$; 3) $x < 0$, $x = 2$; 4) $x \leqslant -3$, $x = 3$; 5) $-5 < x < 5$, $x = -13$; 6) $x < -7$, $x > 7$, $x = -3$.

96. 1) $\frac{16}{81}$; 2) $\frac{1}{32}$; 3) $-0,4992$; 4) 0,3568; 5) -5 и 5; 6) -4.

98. 1) -1; $-2,5$; 2) нет корней; 3) 1; 4) -2; 5) 6,25; 6) 4; 9.

100. 1) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7]$; 2) $x = -8,5$, $-3 < x \leqslant 1$.

101. 1) $4 < x < 5$; 2) $-7,5 \leqslant x \leqslant 5$; 3) $0 < x < 1$; 4) $x \geqslant 6$; 5) $x \geqslant 4$; 6) $1 \leqslant x \leqslant 2,6$.

102. 300 с.

103. 5 см.

105. 1) 45; 2) 2,8; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 6; 5) 20; 7) 15; 8) 12; 9) 4,4; 11) 3; 12) 1.

106. 1) $2^{11}\sqrt{2}$; 2) $8\sqrt[4]{8}$; 3) $a\sqrt[3]{a}$; 4) $b^2 \cdot \sqrt[4]{b}$; 5) $ab^2 \cdot \sqrt[5]{ab}$; 6) $-a\sqrt[4]{-a}$; 7) $2x^5b^3 \cdot \sqrt[3]{4xb}$; 8) $2a^2b^2 \cdot \sqrt[6]{-2ab^2}$.

107. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt[3]{2|a|}$; 4) $\sqrt[10]{2b^2}$; 5) $\sqrt{4x}$; 6) $\sqrt[3]{2a^2}$; 7) $\sqrt{\sqrt{5} - 2}$; 8) $\sqrt[3]{5 - 2\sqrt{6}}$.

108. 1) $\sqrt[6]{a}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) $\sqrt[3]{a^2}$; 4) $\sqrt{b}$; 5) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$.

109. 1) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{8}$; 2) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$; 3) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}} > \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[4]{8\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt[4]{8}}$.

110. 1) $\sqrt[6]{2}$; 2) $\sqrt[12]{\frac{1}{48}}$; 3) $\sqrt[24]{\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[12]{50}$; 5) $\sqrt[12]{0{,}1}$; 6) $\sqrt[20]{160}$.

112. 600 К.
113. 6 м.
114. 1) -7; 7; 2) -2; 2; 3) -4; 4; 4) -5; 2; 5) $\sqrt[3]{80}$; 6) 8; 27.
115. 1) 7; 2) 4,7.
116. 1) 0; 2) -18; 17.
117. 1) $x_1 = 1, y_1 = 9; x_2 = 9, y_2 = 1$; 2) $x_1 = 1, y_1 = 4; x_2 = 4, y_2 = 1$; 3) $x_1 = 1, y_1 = 27; x_2 = 27, y_2 = 1$; 4) $x_1 = 1, y_1 = 64; x_2 = 64, y_2 = 1$.

118. 1) $a \leqslant 0$; 2) $a < 2, a = \frac{9}{4}$.

119. 1) $\sqrt[30]{\frac{1}{b}}$; 2) $\sqrt[12]{\frac{a^2}{9b}}$; 3) $\sqrt[6]{2ab}$; 4) $\sqrt[10]{\frac{ax}{2}}$; 5) $\sqrt[4]{a^3}$; 6) $\sqrt[60]{\frac{1}{x}}$.

120. 1) -1; 2) -1.

121. 1) $x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y^{\frac{1}{4}}$; 3) $a^{\frac{3}{5}}$; 4) $b^{\frac{5}{6}}$; 5) $|a|^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}$; 6) $b^{\frac{1}{3}} |c|^{\frac{2}{3}}$; 7) $(-a)^{\frac{3}{2}}$; 8) $(-y)^{\frac{5}{6}}$; 9) $|d|^{\frac{2}{3}}$.

122. 1) $\sqrt[7]{a^2}$, где $a > 0$; 3) $\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{a}}$; 5) $\sqrt[3]{c^5}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{b^3}}$; 7) $\sqrt[10]{\frac{a^6}{b^7}}$, где $a > 0$; 8) $\sqrt[10]{\frac{1}{x^8y^9}}$, где $x > 0$; 12) $\sqrt[3]{(x+2y)^2}$, где $x + 2y > 0$.

123. 1) $x^{\frac{3}{4}}$; 2) $y^{\frac{9}{28}}$; 3) $c^{\frac{13}{36}}$; 4) $b^{\frac{7}{30}}$; 5) a^2; 6) x^{-2}; 7) $b^{\frac{3}{2}}$; 8) $c^{\frac{1}{2}}$.

124. 1) 27; 2) $\frac{1}{25}$; 3) 100; 4) 1000; 5) $\frac{16}{9}$; 6) $\frac{8}{27}$; 7) 9; 8) 2; 9) $\sqrt{3}$.

125. 1) а) 2^{-2}; б) 2^{-5}; в) $2^{0,8}$; г) $2^{-0,9}$; д) $2^{3,5}$; 2) а) $(\sqrt{2})^{-4}$; б) $(\sqrt{2})^{-10}$; в) $(\sqrt{2})^{1,6}$; г) $(\sqrt{2})^{-1,8}$; д) $(\sqrt{2})^{7}$; 3) а) 4^{-1}; б) $4^{-2,5}$; в) $4^{0,4}$; г) $4^{-0,45}$; д) $4^{1,75}$; 4) а) $(0{,}125)^{\frac{2}{3}}$; б) $(0{,}125)^{\frac{5}{3}}$; в) $(0{,}125)^{-\frac{4}{15}}$; г) $(0{,}125)^{0,3}$; д) $(0{,}125)^{-\frac{7}{6}}$; 5) а) $(\sqrt[3]{4})^{-3}$; б) $(\sqrt[3]{4})^{-7,5}$; в) $(\sqrt[3]{4})^{1,2}$; г) $(\sqrt[3]{4})^{-1,35}$; д) $(\sqrt[3]{4})^{5,25}$.

126. 1) а) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{7}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3,5}$;
2) а) $(\sqrt[3]{9})^{-6}$; б) $(\sqrt[3]{9})^6$; в) $(\sqrt[3]{9})^{\frac{3}{5}}$; г) $(\sqrt[3]{9})^{-\frac{15}{14}}$; д) $(\sqrt[3]{9})^{5,25}$; 3) а) 3^{-4};
б) 3^4; в) $3^{\frac{2}{5}}$; г) $3^{-\frac{5}{7}}$; д) $3^{3,5}$; 4) а) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{15}}$;
г) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{5}{21}}$; д) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{7}{6}}$; 5) а) $(\sqrt[5]{81})^{-5}$; б) $(\sqrt[5]{81})^5$; в) $(\sqrt[5]{81})^{\frac{1}{2}}$;
г) $(\sqrt[5]{81})^{-\frac{25}{28}}$; д) $(\sqrt[5]{81})^{\frac{35}{8}}$.

127. 1) $(a^{0,5})^2$; 2) $(y^{1,5})^2$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2$; 4) $\left(b^{-\frac{1}{5}}\right)^2$; 5) $(2c^{0,5})^2$; 6) $(5a^{0,5})^2$;
7) $(8x^{0,5}y^{0,25})^2$; 8) $\left(3b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

128. 1) $\left(p^{\frac{1}{3}}\right)^3$; 2) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3$; 3) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3$; 4) $\left(b^{-\frac{1}{7}}\right)^3$; 5) $\left(2z^{\frac{1}{3}}\right)^3$; 6) $\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)^3$.

129. 2) $a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{4}}$; 3) $b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{6}}$; 4) $x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1$; 5) $c^{\frac{5}{6}} - c^{-\frac{5}{6}}$;
6) $a + a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} - 1$; 7) $z^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$; 8) $a + b$.

130. 1) $\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(10^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right)\left(10^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right)$;

2) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(b^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{1}{2}}\right)\left(b^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 - 5^2 = \left(a^{\frac{3}{2}} - 5\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + 5\right)$;

4) $(x^2)^2 - \left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(x^2 - y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x^2 + y^{\frac{3}{2}}\right)$;

5) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 3^2 = \left(a^{\frac{1}{4}} - 3\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + 3\right)$;

6) $5^2 - \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^2 = \left(5 - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(5 + b^{\frac{1}{6}}\right)$;

7) $\left((3x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{8}}\right)^2 = \left((3x)^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{8}}\right)\left((3x)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{8}}\right)$;

8) $\left(p^{\frac{1}{10}}\right)^2 - \left((3q)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(p^{\frac{1}{10}} - (3q)^{\frac{1}{2}}\right)\left(p^{\frac{1}{10}} + (3q)^{\frac{1}{2}}\right)$;

9) $(x^{0,7})^2 - \left(28^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{0,7} - 28^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{0,7} + 28^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)$.

131. 1) $2^3-\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(2-a^{\frac{1}{3}}\right)\left(4+2a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)$;

2) $\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3+3^3=\left(b^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(b^{\frac{2}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}+9\right)$;

3) $\left(10x^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(10x^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}\right)\left(100x^{\frac{2}{3}}+10x^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)$;

4) $5^3+\left(2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(5+2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)\left(25-5\cdot 2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)$;

5) $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3+2^3=\left(a^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}+4\right)$;

6) $4^3-\left(b^{\frac{1}{9}}\right)^3=\left(4-b^{\frac{1}{9}}\right)\left(16+4b^{\frac{1}{9}}+b^{\frac{2}{9}}\right)$;

7) $\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3-\left(z^{\frac{1}{12}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{6}}-z^{\frac{1}{12}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{12}}+z^{\frac{1}{6}}\right)$;

8) $\left(b^{\frac{1}{18}}\right)^3+\left(2c^{\frac{1}{6}}\right)^3=\left(b^{\frac{1}{18}}+2c^{\frac{1}{6}}\right)\left(b^{\frac{1}{9}}-2b^{\frac{1}{18}}c^{\frac{1}{6}}+4c^{\frac{1}{3}}\right)$.

132. 2) $\dfrac{1}{1-a^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1-a^{-\frac{5}{6}}}$.

133. 1) $-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$; 3) $a^{\frac{1}{2}}+5$; 4) $\dfrac{-1}{x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}}$.

134. а) 2,8; б) 0,75; в) 13; г) 29.

135. 1) $\dfrac{c^{\frac{1}{3}}-1}{c^{\frac{1}{3}}+1}$; 2) $\dfrac{y^{\frac{2}{3}}+1}{y^{\frac{1}{3}}}$; 3) $-b^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$; 4) -10.

136. 1) -1; 2) $-\dfrac{4}{3}$.

137. 1) $a<1$; 2) $a\geqslant 2$.

Глава 3

Показательная и логарифмическая функции

139. Принадлежат.

143. 2) 4; 3) 4; 5) $-\dfrac{2}{3}$; 6) 1,2; 8) $\dfrac{3}{4}$; 9) 0,75.

144. 1) 9; 2) $\sqrt{5}$.

146. Проходит.

170. 1) 2; 2) 0.

171. 1) $a \geqslant 0,\ a = -\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{1}{4} < a < 0$.

172. 1) $x > 23$; 2) $x > 6$; 3) $-2 < x < 7$; 4) $0{,}99 < x < 1$; 5) $0 < x < 3$; 6) $x < -2,\ x > 7$.

174. 1) $25 < x < 36$; 2) $4 < x < 9$; 3) $0 < x < 0{,}16,\ 1 < x < \frac{7}{3}$; 4) $\frac{3}{7} \leqslant x < 0{,}81,\ x \geqslant 1$; 5) $-\sqrt{10} < x < -3,\ \sqrt{10} < x \leqslant 10$; 6) $-3 < x < -\sqrt{8},\ -1 < x < \sqrt{8}$.

175. 1) $4 < x < 6$; 2) $4 < x < 6$.

177. 1) 1; 2) -2; 3) 2; 4) 2; 5) 2; 8) 169.

178. 1) $4a$; 2) $2a$; 3) $7{,}5a$; 4) $-4a$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) $1 - a$.

179. 1) $3a + b$; 2) $\frac{3 - 3a}{b + 1}$.

180. 1) 13,5; 2) 20,25.

181. 1) 5; 2) 1023.

184. 1) 100; 0,01; 2) 2; $\frac{1}{8}$; 3) 3; 27; 4) 100; 0,1; 5) 3; $\frac{1}{9}$; 6) 0,5; 4; 7) $\frac{2}{\log_3 1{,}5}$; 8) $\frac{1}{\lg 0{,}07}$; 9) 0,00001; 1000; 10) $\log_{\frac{5}{9}} \frac{3}{25}$.

185. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$; а) 100; б) 10.

186. 1) -100; 2) -1000.

187. 1) $3 < x < 4{,}5$; 2) $-1 < x < \frac{2}{3}$; 3) $-2 < x < \frac{2}{7}$; 4) $\log_3 \frac{4}{3} < x < \log_3 28$; 5) $x < \log_4(\sqrt{3} - 1),\ x > 1{,}5$.

188. 2) а) 1,115; б) 21,17; в) 0,01531; г) 4,052.

Глава 4

Тригонометрические функции и их свойства

193. 1) $960°$; 2) $1440°$.

194. 3) $190° + 360° \cdot (-1)$; 5) $320° + 360° \cdot 8$; 7) $70° + 360° \cdot (-7)$.

195. в) $-110° + 360° \cdot (-1)$.

196. 1) $40°$; $400°$; $760°$; $-320°$; $-680°$.

197. 2) а) $30° + 90°n$; б) $30° + 120°n$, n — любое целое число.

198. 2) а) $P_{-70°}$; 3) а) наименьшее по модулю значение $\beta = -70$; б) наименьшее положительное значение $\beta = 290$.

199. 5) $\frac{25\pi}{36}$; 7) $-\frac{5\pi}{4}$.

200. 3) $36°$; 9) $114{,}6°$.

201. 3) $\frac{5}{4}\pi$; 5) $-\frac{2}{3}\pi$; 11) $-\frac{251}{18}\pi$.

204. 3) $\approx -1{,}4$; 5) $\approx 4{,}375$; 7) $\approx 18{,}025$; 9) ≈ -28.

206. 2) $197{,}8°$; 3) $-93{,}2°$; 4) $303°$.

207. 1) Общий вид углов поворота, переводящих точку P в точку M, таков: $\alpha° = 90° + 360°n$, n — любое целое число.

208. $\omega \approx 0{,}26$ рад/ч, $v \approx 1700$ км/ч.

212. 8) II четверть, $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$.

215. 1) а) $156° + 360°n$ и $24° + 360°n$, n — целое число;
2) а) $45° + 360°n$ и $135° + 360°n$, n — целое число.

217. 1) $\cos 72° \approx 0{,}31$, $\sin 72° \approx 0{,}95$;
4) $\cos 215° \approx -0{,}82$, $\sin 215° \approx -0{,}57$.

219. 1) 3; 3) 1; 5) 0.

220. 1) Синус равен косинусу для углов 45° и 225°; 2) синус противоположен косинусу для углов 135° и 315°; 4) синус больше косинуса для углов между 45° и 225°.

223. 1) Да; 3) нет; 7) нет; 8) да.

224. 3) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

225. 1) $\varphi = \pi n$, n — любое целое число.

226. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; 5) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$;

6) $\pi + 2\pi n \leqslant \varphi \leqslant 2\pi(n+1)$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

230. 9) Положительное; 10) отрицательное.

233. 3) $-1{,}4$; 5) $1{,}4$; 6) $-3{,}7$.

234. 1) $52{,}43° + 180°n$; 3) $-21{,}80° + 180°n$, n — любое целое число.

235. 1) Для углов 45°, 135°, 225° и 315°; 2) нет таких углов; 3) для углов между 45° и 90°, между 135° и 180°, между 225° и 270°, между 315° и 360°; 4) для углов между 0° и 45°, между 90° и 135°, между 180° и 225°, между 270° и 315°.

237. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет.

240. 4) 0.

242. 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, n — любое целое число.

243. 3) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$; 5), 6) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

244. 1) $\varphi = \frac{\pi}{2}n$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$; 5) $-\frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant \varphi \leqslant \pi n$, n — любое целое число.

245. 2) а) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$; в) $y = -\sqrt{3}x + 3$.

246. 2) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} 2$; 3) $\sin 15° < \sin 15$; 4) $\cos 3 < \cos 4$.

250. 3) Отрицательна.

251. 1) $-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{1}{2} \arcsin p \leqslant \frac{\pi}{4}$; 4) $\pi < \pi + \operatorname{arcctg} p < 2\pi$.

252. 2) $-\frac{\pi}{4}$.

253. 1) $\frac{\pi}{6}$; 3) 1.

254. 3) 0.

256. 1) $\alpha = \beta$; 2) $\alpha = \beta$.

257. 1) $a \in [-1; 1]$; 3) $a \in \boldsymbol{R}$.

258. 3) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

259. Нет.

262. 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$, $\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$, n — любое целое число; 2) $2\pi n$, n — любое целое число.

266. 1) $\sin 34° - \cos 34°$; 2) $2 \operatorname{ctg} 20°$.

267. 1) $-\operatorname{tg} x$; 3) $-\operatorname{ctg} \varphi$.

268. 1) а) $\sin 120° \approx 0{,}866$, $\cos 120° = -0{,}5$, $\operatorname{tg} 120° \approx -1{,}732$.

273. 4) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

274. 2) $\frac{4\pi}{7}$; 3) $\frac{\pi}{2} - 6 + 2\pi$; 4) $10 - 3\pi$; 5) $\frac{\pi}{2} - 10 + 3\pi$.

280. 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n — любое целое число; 5) не имеет решения.

281. 2) Общий вид уравнения оси симметрии $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k — любое целое число.

282. 2) Общий вид абсцисс центров симметрии $x = \pi n$, где n — любое целое число.

284. 1) $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = -2$; 3) $y_{\max} = 1{,}5$, $y_{\min} = -0{,}5$; 5) $y_{\max} = 6$, $y_{\min} = 3\frac{3}{4}$.

285. 1), 4) — нечётные; 2), 3) — чётные.

287. $a > 5$.

289. 2) Функция $y = \sec x$ чётная, а функция $y = \operatorname{cosec} x$ нечётная.

294. 1) $x \neq 2\pi n$, n — любое целое число; 2) $x \neq \pi + 2\pi n$, n — любое целое число; 5) нет решений; 6) нет решений.

295. 2) Общий вид уравнения оси симметрии $x = \pi n$, n — любое целое число.

296. 2) Абсциссы некоторых центров симметрии $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Общий вид абсцисс центров симметрии: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n — любое целое число.

298. 1) 0,4 и 0; 3) 1 и $\frac{1}{3}$; 4) 1 и 0,2.

301. 1) π; 2) 4π.

302. а) Чётные функции 1), 5) и 6); б) нечётная функция 2).

303. 1) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
2) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

304. 1) $\frac{\pi}{12} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
2) $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
4) $-\frac{5\pi}{24} + \pi n < x < \frac{13\pi}{24} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

310. 1) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
3) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
5) $\operatorname{arctg} 3 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\operatorname{arcctg}(-3) + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

317. 1) а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; в) $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{4}$; 3) а) $\operatorname{arctg} 2$; б) $\pi + \operatorname{arctg} 2$; в) $2\pi + \operatorname{arctg} 2$; $3\pi + \operatorname{arctg} 2$.

318. 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) таких x нет; 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

320. 1) Функция возрастает на промежутках:
$\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right]$ и убывает на $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
2) функция возрастает на промежутках $[-\pi + 4\pi n; \pi + 4\pi n]$ и убывает на $[\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) убывает на $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{7\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

321. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π; 3) π; 4) π.

322. 1) $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 2) $\left(0{,}6; \frac{\pi}{2}\right)$.

323. 1) Могут; 2) могут.

324. 1) $\cos\alpha = \frac{33}{65}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{56}{33}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{33}{56}$; 3) $\sin\alpha = \frac{35}{37}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{35}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{35}$; 5) $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$; $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$.

325. 5) $1 - \sin\beta$; 7) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; 9) $\operatorname{tg}^6\beta$; 11) $\frac{2}{\sin\beta}$; 13) $\frac{1}{\sin\beta}$; 15) $\frac{2}{|\sin\alpha|}$.

326. 1) -7; 2) 0.

328. 1) 0; 3) 1; 5) 1.

329. 7) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 8) $-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

331. 1) 7; 2) 47.

332. 1) Не могут; 2) могут.

334. 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$.

335. 11) $-\sin\varphi$.

336. 1) $\frac{117}{125}$; 3) $\frac{33}{65}$; 5) $\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

338. 1) $\frac{171}{221}$; 2) $\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$ и $\frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10}$.

339. 1) $\frac{204}{325}$; 2) $-\frac{17}{145}$.

340. 3) $\sqrt{2}\cos\alpha$.

341. 1) г) $\cos\beta$.

342. 1) Значение первого выражения больше значения второго; 2) значение первого выражения больше значения второго; 3) значения выражений равны.

343. 1) 1; 2) -1.

344. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$.

345. 2) $\pm\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

346. 105°.

352. 3) $-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

353. 1) $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2 - 3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1 - 1{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1{,}5}$.

354. 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

355. 1) а) $\frac{17}{19}$; в) $-\frac{171}{140}$.

356. 1) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{7}$.

357. 1) 17,2.

358. 90°.

359. 1) 1; 3) $\sqrt{3}$.

363. 3) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

365. 1) tg 55°; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ctg 10°.

366. 2) Угловые коэффициенты k_1 и k_2 взаимно перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$.

367. 9) $\cos^2\frac{\pi}{14} - \sin^2\frac{\pi}{14}$; 11) $\frac{2\operatorname{tg} 0{,}15\pi}{1-\operatorname{tg}^2 0{,}15\pi}$; 13) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; 15) $2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$; 17) $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$; 19) $2\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{2}\right)$.

368. 1) 0,96; 3) $\frac{3}{4}$; 5) $-\frac{24}{7}$.

370. 3) sin 24°; 5) sin 45°; 7) cos 140°; 11) $\cos\alpha$;
13) $\cos 2\alpha$; 15) tg 20°; 17) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 18) cos 45°.

371. 3) cos 10° − sin 10°; 5) $\frac{1}{\cos 20°}$; 7) cos 5°; 8) cos 25° − sin 25°.

372. 1) а) sin 20°; б) $\frac{\sin 40°}{2}$; г) $\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}$.

373. 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$, $\pi - \arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

374. 1) 30; 2) 150.

375. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

376. 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

380. 1) Может, так как $\sin 2x = 2\sin 24° < 2\sin 30° = 1$; 2) не может, так как $\sin 2x < 2\sin 34°$ при любом x, так как $2\sin 34° > 2\sin 30° = 1$; 3) да; 4) нет.

382. Наибольшее и наименьшее значения функции: 1) 1 и -1; 3) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

385. 1) $2\cos 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$; 5) $2\sin\frac{11\pi}{120}\cos\frac{\pi}{120}$; 8) $2\cos 3\alpha\cos\alpha$.

388. 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

391. 1) $\frac{3}{16}$; 2) 3.

392. 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

393. 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

394. 1) а) $\sin^2 4\alpha$; б) $\sin 4\alpha \sin 5\alpha$; в) $\sin 7\alpha \sin 8\alpha$.

395. 1) а) $\frac{\sin 8\alpha}{2}$; б) $\sin 4\alpha\cos 5\alpha$; в) $\sin 8\alpha\cos 7\alpha$; 2) аргументы слагаемых составляют арифметическую прогрессию, а аргумент множителя равен её полуразности.

396. 1) $\frac{1}{4}$.

398. 1) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

399. 1) $-\pi$; $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{2}$; π.

400. 1) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

401. 1) а) $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\mathrm{arctg}\, 3 + \pi n$, $\mathrm{arctg}\, 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) корней нет; з) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

402. 1) а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) πn, $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $-\mathrm{arctg}\, 2 + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

403. 1) а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\, 5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

404. 1) а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

405. 1) а) $2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

406. 1) $\frac{2\pi n}{3},\ (2n+1)\frac{\pi}{11},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{2\pi n}{9},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}$ или $\frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{8}(2n-1),\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi n}{5};\ -\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

407. 1) $-\frac{\pi}{2} - 2\pi n$ или $\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

410. 1) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi n,\ \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 10) $\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ \operatorname{arctg} 7 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 11) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k,\ \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}k,\ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 12) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 13) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 14) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 15) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 1) + \pi n,\ -\operatorname{arctg}(\sqrt{3} + 1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 16) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

411. $\frac{\pi}{12}$.

412. 1) $0,\ \pm\frac{\pi}{2}$; 2) $\pm\pi$.

413. 1) $\pi,\ \frac{7\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{6}$.

Глава 5

Элементы теории вероятностей и комбинаторики

414. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{9}$.

415. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$.

416. 1) $\frac{5}{31}$; 2) $\frac{1}{15}$; 3) $\frac{7}{15}$.

418. $\frac{1}{3}$.

419. $\frac{199}{200}$.

420. 0,28.

421. 0,5.

422. 0,52.

423. 0,16.

425. 1) 3,6%; 2) 7,6%.

429. Частота всхожести примерно равна 97%.

430. Скорее всего, в коробке 3 чёрных шара.

431. 12.

432. 1) а) $\frac{13}{34}$; б) $\frac{32}{221}$; в) $\frac{96}{221}$; 2) а) $\frac{1}{17}$; б) $\frac{1}{221}$; в) $\frac{20}{221}$; 3) а) $\frac{15}{34}$; б) $\frac{33}{221}$; в) $\frac{116}{221}$.

433. 1) $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$.

434. 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{7}{72}$; 3) $\frac{1}{8}$.

435. 1) $\frac{1}{16}$; 2) 0,25; 3) 0,375.

436. 3.

437. 1) $\frac{1}{2}C_6^3$; 2) C_6^2.

438. 0,18.

439. 0,14.

440. 1) а) A_{20}^3; б) P_{20}; 2) $\frac{1}{19}$.

441. $\frac{2}{11}$.

442. 10 треугольников.

443. C_{17}^4.

445. C_{20}^{10}.

446. 1) $\frac{8}{35}$; 2) $\frac{3}{35}$; 3) $\frac{16}{35}$.

448. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{7}{20}$.

451. 960.

Глава 6

Повторение

452. 1) $x \neq 1$; 2) $x \neq -1$; 3) $x \leqslant -1{,}6$, $x \geqslant -1$; 4) $(-\infty; 0{,}75] \cup [1; +\infty)$.

453. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $y \geqslant -16$; 4) $y \leqslant 4$; 7) $[-21; 3]$; 8) $0 < y \leqslant 2$; 9) $[1; 4]$; 10) $[2; +\infty)$.

454. 1) $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$; 3) $[2\pi n; \pi(2n+1)]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)\right)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

455. 1) $(-3; -0{,}5) \cup (5; +\infty)$; 2) $x < -3$, $-0{,}5 < x < 0{,}5$; 3) $3 < x \leqslant 4$; 4) $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $\left(-\frac{5\pi}{2} - 2\pi n; -\frac{3\pi}{2} - 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$; 6) $(0; 0{,}5)$, $(2\pi n - \pi; 2\pi n)$, $(-2\pi n; \mathrm{p} - 2\pi n)$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

456. 1) $x < -\frac{3}{4}$; 2) $-1 < x < 1$; 3) $1 < x < 2$; 4) $5 < x < \frac{5+\sqrt{61}}{2}$.

457. 1) Функция возрастает на промежутках $[a; b]$ и $[c; d]$, а убывает на промежутках $[b; c]$ и $[d; +\infty)$; 2) функция возрастает на промежутке $[-2; 1{,}5]$, а убывает на промежутках $[-3; -2]$ и $[1{,}5; 5{,}5]$; 3) функция возрастает на промежутке $[1{,}5; 3{,}5]$, а убывает на промежутках $[-2{,}5; 1{,}5]$ и $[3{,}5; 5]$.

459. Убывающие: 2), 5); возрастающие: 1), 3), 4).

460. 1) Возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$; наибольшее значение 4; 2) возрастает на $(-\infty; 2]$, убывает на $[2; +\infty)$; наибольшее значение 25; 3) возрастает на $(-4; -1{,}5]$, убывает на $[-1{,}5; 1)$; наибольшее значение $-1{,}2$; 4) возрастает на $[-3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -3]$, наименьшее значение $\log_7 2$; 5) возрастает на $[2\pi k; \pi(2k+1)]$, убывает на $[\pi(2k+1); 2\pi(k+1)]$, где $k \in \boldsymbol{Z}$; наибольшее значение 9, наименьшее значение 1; 6) возрастает на $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right]$, где $k \in \boldsymbol{Z}$; наибольшее значение $\frac{10}{3}$; наименьшее значение 0,3.

461. 1) а) $D(g) = [-3; 4]$, $D(h) = (-3; -2) \cup (-2; -0{,}8) \cup (-0{,}8; 3{,}3) \cup (3{,}3; 4)$; б) $E(g) = [0; \sqrt{4{,}5}]$, $E(h) = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{\lg 4{,}5}; +\infty\right)$; в) $g(x)$ возрастает на $[-2; 1{,}5]$, убывает на $[-3; -2]$, $[1{,}5; 4]$, $h(x)$ возрастает на $(-3; -2)$, $[1{,}5; 3{,}3)$, $(3{,}3; 4)$, убывает на $(-2; -0{,}8)$, $(-0{,}8; 1{,}5]$; г) $\min g(x) = 0$, $\max g(x) = \sqrt{4{,}5}$, у $h(x)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значения; 2) а) $D(g) = [-2{,}5;\ 0{,}8] \cup [2{,}3;\ 4]$, $D(h) = [-2{,}5;\ 0{,}3) \cup (0{,}3;\ 0{,}8) \cup (2{,}3;\ 2{,}8) \cup (2{,}8;\ 3{,}7) \cup (3{,}7;\ 4)$; б) $E(g) = [0;\ \sqrt{4{,}5}]$, $E(h) = (-\infty;\ 0) \cup \left[\frac{1}{\lg 4{,}5};\ +\infty\right)$; в) $g(x)$ возрастает на $[2{,}3;\ 3{,}5]$, убывает на $[-2{,}5;\ 0{,}8]$, $[3{,}5;\ 4]$, $h(x)$ возрастает на $[-2{,}5;\ 0{,}3)$, $(0{,}3;\ 0{,}8)$, $[3{,}5;\ 3{,}7)$, $(3{,}7;\ 4)$, убывает на $(2{,}3;\ 2{,}8)$, $(2{,}8;\ 3{,}5]$; г) $\min g(x) = 0$, $\max g(x) = \sqrt{4{,}5}$, у $h(x)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

462. 1) 1; 2) 0; 3) –3; 4) 11; 5) 1; 6) 2; 7) 1; 8) 2; 9) 0.

463. 1) а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{7}$; г) $3\pi - 10$; 2) а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $4\pi - 10$; 3) а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{5}$; г) $7 - 2\pi$; 4) а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{5}$; г) $7 - 2\pi$.

464. 1) $\frac{3-\sqrt{17}}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}$, $1 < x \leqslant \frac{3+\sqrt{17}}{4}$; 2) $\cos\frac{1}{3} < x \leqslant 1$.

465. Например, $y = \frac{1}{x}$. Не может.

466. Нечётные: 1), 2); чётные: 3), 4). Нечётная: б), д); чётная: а), в), г).

469. При преобразовании (3) расстояния до оси абсцисс умножаются на k; при преобразовании (4) расстояния до оси ординат делятся на k.

474. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) 10π; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 2.

475. 1) Симметрия относительно оси ординат; 2) симметрия относительно оси абсцисс; 3) перенос параллельно оси абсцисс на 3 единицы влево; 4) перенос параллельно оси ординат на 3 единицы вверх; 5) сжатие к оси ординат в 2 раза; 6) растяжение от оси абсцисс в 2 раза.

477. Нет корней.

479. 3) $x < -2$, $x > 2$.

481. 3) $1{,}25 < x < 1{,}5$.

482. 1) 135 га, 297 га, 432 га; 3) 11 км/ч; 6) 10 кг.

СОВЕТЫ

Глава 1

Функции и графики

7. Подумайте, сколькими способами можно выбрать первую цифру двузначного числа.

17. Подумайте, какие целые (натуральные) значения x следует брать, чтобы значения y тоже оказались целыми (натуральными).

23. 3) Представьте себе, как расположена прямая по отношению к оси абсцисс.

24. Подумайте, каково взаимное расположение графиков данной функции и функции: 1) $y = x$; 2) $y = -x$.

29. Не нужно вычислять k, достаточно сравнить произведения координат точек.

30. 2) Должны быть равны произведения координат.

34. 1), 2) Можно применить формулу расстояния или построить график. В 3) представьте себе, как выглядит искомый график, и запишите ответ.

37. 4) Перед тем как применять формулу корней квадратного уравнения, попробуйте найти сумму его коэффициентов.

43. Найдите значения левой части уравнения на концах данного отрезка и воспользуйтесь свойством непрерывной функции.

44. 2), 4). При решении нестрогого неравенства нули соответствующей функции включаются в множество решений. При изображении этих нулей на координатной оси их удобно изображать не «пустым», а чёрным кружком.

52. Попробуйте подобрать корень. Обратите внимание на характер монотонности функций, которые задаются левой и правой частями уравнения.

56. Абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ равна $-\frac{b}{2a}$, а ординату можно найти подстановкой абсциссы в уравнение.

60. Ответы на эти вопросы связаны с наличием или отсутствием корней соответствующего квадратного уравнения. Здесь лучше находить сокращённый дискриминант: $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

61. Подумайте, при каком значении x левая часть уравнения равна $a - b + c$.

62. Постарайтесь дать ответ устно.

63. Справа и слева от вершины параболы квадратичная функция монотонна. Выясните, принадлежит ли абсцисса вершины указанному промежутку и как ведёт себя данная функция на этом промежутке.

65. Область определения можно найти по рисунку, ответив на вопрос, какой может быть сторона прямоугольника. Площадь прямоугольника должна изменяться от нуля до своего наибольшего значения, причём нулём она быть не может.

Глава 2

Степени и корни

73. Утвердительный ответ на вопрос: «Может ли ...?» — достаточно подтвердить конкретным примером, а отрицательный ответ необходимо обосновать.

82. 2) Проще всего задать эту функцию кусочно. Чтобы задать её одной формулой, в а) воспользуйтесь симметрией графика относительно оси ординат. В б) нужно сделать симметрию части графика, полученного в а), относительно оси абсцисс. Изменить знак у функции при $x < 0$ поможет выражение $\frac{|x|}{x}$. Кстати, в математике есть специальная функция *сигнум* (лат. *signum* — знак): $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x > 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ -1, \text{ при } x < 0, \end{cases}$

правда, в область определения нашей функции 0 не входит.

91. Для обратимости функции необходимо и достаточно, чтобы каждому её значению соответствовало одно-единственное значение аргумента. В противном случае её график не будет задавать функцию x. Графически это выражается в том, что любая прямая, перпендикулярная оси ординат, либо не пересекает график функции y, либо имеет с ним единственную общую точку. После того как вы убедитесь в обратимости функции $y = f(x)$, график функции $y = g(x)$ легко построить с помощью симметрии относительно прямой $y = x$.

98. Равенство *с неотрицательными частями* не нарушится, если его возвести в квадрат. Поэтому, возводя в квадрат уравнение, следует затем проверить его корни, — ведь они были найдены в предположении, что обе части уравнения положительны. Если при подстановке корня это окажется не так, его следует отбросить как посторонний. В заданиях 1)—4) неотрицательность левой части гарантируется равенством, которое получается после возведения в квадрат, поэтому найденный корень можно подставить только в правую часть исходного уравнения.

100. Корень, конечно, на знак не влияет, но подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а в задании 1) оно ещё не может обращаться в нуль.

101. В заданиях 1)—3) следует рассмотреть два случая: а) когда выражение без корня меньше нуля, достаточно, чтобы выражение под корнем не было отрицательным; б) когда выражение без корня больше или равно нулю, обе части неравенства можно возвести в квадрат. В заданиях 4)—6) не забудьте о том, что выражение под корнем должно быть неотрицательным.

106. 6) a здесь может принимать только неположительные значения, поэтому $\sqrt[4]{a^4} = |a| = -a$. 8) И здесь a принимает только неположительные значения. Поэтому

$$\sqrt[6]{-a^{13}} = a^2\sqrt[6]{-a}.$$

107. 3) Следует «подстраховаться» на случай отрицательных значений a: $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{|a|}$. 7), 8) Подумайте, какое число, положительное или отрицательное, возводится в квадрат под знаком корня.

114. Введением вспомогательной переменной приведите к квадратному уравнению.

115. Произведение суммы на разность равно, как известно, разности квадратов.

116. Иррациональные уравнения с квадратными корнями решаются возведением в квадрат, а с кубическими — в куб. Полезно помнить, что $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

117. Чтобы найти неизвестные по их сумме и произведению, удобно составить квадратное уравнение, корнями которого являются неизвестные.

118. Введите вспомогательную переменную.

119. Приведите корни к одному показателю.

120. Выражение под корнем с бо́льшим показателем постарайтесь представить в виде квадрата.

125. Представьте данные основания в виде равенства степеней числа 2 и перейдите к равенству показателей.

134. а), б) Сократите дробь на a в некоторой степени.

137. С помощью вспомогательных переменных сведите уравнения к квадратным, которые не должны иметь положительных корней.

Глава 3

Показательная и логарифмическая функции

146. a^{-6} и a^6 можно найти, зная a^2.

151. Приведите обе части уравнения к одному основанию и приравняйте показатели.

152. 1)—6) Старайтесь выносить такой множитель, чтобы в скобках остались целые числа; 7), 8) разнесите по разным частям равенства степени с одинаковыми основаниями.

153. Сведите к квадратным уравнениям, вводя вспомогательную переменную.

154. 1), 2) Запишите первое уравнение системы в виде равенства степеней с одинаковыми основаниями; 3) в первом уравнении системы примените формулу сокращённого умножения; 4) в первом уравнении системы разнесите переменные по разным частям равенства и подумайте о свойствах функции, значения которой равны соответственно левой и правой частям равенства.

156. 1)—4) Запишите правую часть равенства в виде степени и воспользуйтесь монотонностью показательной функражений имеет смысл. Выполняя преобразования, старайтесь получить логарифмы с одинаковыми основаниями.

184. Подумайте, по какому основанию логарифмировать уравнение.

185. Найдите логарифмы $a^{\log_b c}$ и $c^{\log_b a}$ по основанию b.

187. 1)—3) Потенцируйте неравенство с учётом монотонности логарифмической функции; 4) приведите к квадратному неравенству относительно $\log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1)$; 5) приведите к квадратному неравенству относительно $\log_3(4^x + 1)$.

Глава 4

Тригонометрические функции и их свойства

223. Используйте результаты № 220.

236. Представьте $\sin\varphi - \operatorname{tg}\varphi$ как $\dfrac{\sin\varphi(\cos\varphi - 1)}{\cos\varphi}$.

259. Следует учесть ограниченность множества значений арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

260. См. указание к № 259.

262. Отнеситесь к этим уравнениям как к квадратным.

284. 5), 6) Рассмотрите выражение в правой части равенства как квадратный трёхчлен относительно $\sin x$ и подумайте, на каком промежутке его рассматривать.

287. Рассмотрите выражение в правой части равенства как квадратный трёхчлен относительно $\sin x$ и подумайте, при каком значении синуса значение трёхчлена будет наименьшим.

323. Необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов чисел была равна 1.

331. 1) Возведите в квадрат обе части данного равенства. 2) Возведите в квадрат равенство, полученное в первом задании.

333. 1) *Способ 1.* Рассмотрим единичную окружность с центром в начале координат. Для точки этой окружности, находящейся в I координатной четверти (угол поворота острый), доказываемое утверждение сводится к очевидному сравнению суммы катетов с гипотенузой, равной 1.

Способ 2. Сравнить с 1 квадрат суммы синуса и косинуса угла I четверти.

337. Представьте углы следующим образом:
1) $15° = 45° - 30°$;
2) $75° = 45° + 30°$;
3) $105° = 60° + 45°$
и примените формулы синуса и косинуса суммы и разности.

343. 1) Представьте $\sin 48°$ как $\sin(23° + 25°)$ и примените формулу синуса суммы.

350. Воспользуйтесь тем, что $15° = 45° - 30°$.

378. В процессе преобразований обратите внимание на границы, в которых заключены аргументы тригонометрических функций, и каковы по знаку их значения.

381. Представьте аргумент синуса в виде суммы.

382. 4) Используйте формулу косинуса двойного угла.

383. Умножьте равенство на $8 \sin 20°$.

406. 6) Представьте правую часть равенства следующим образом: $-\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$.

410. 1) Упростите левую часть уравнения. 2) Сведите к квадратному уравнению. 3), 5) Решите разложением на множители. 4) Однородное уравнение. 6), 8) Разделите уравнение на 2 и примените одну из двух формул: косинуса разности или синуса суммы двух аргументов. 7) Примените формулы приведения. 9) Решайте или по формуле разности косинусов, или используя условие равенства косинусов. 10) Однородное уравнение. 11) Используйте способ группировки для разложения на множители. 12) Сведите к квадратному уравнению. 13) Однородное уравнение. 14) Сверните по формуле синуса суммы. 15) Сведите к однородному уравнению.

Глава 6

Повторение

453. 7) Рассмотрите квадратный трёхчлен от вспомогательной переменной и подумайте, какие значения она может принимать. 8), 9) Подумайте, на каком промежутке функция возрастает, а на каком убывает. 10) $3^x + 3^{-x}$ — сумма обратно пропорциональных переменных, которая минимальна при равенстве их значений.

455. 5), 6) Рассматривайте интервалы на тригонометрическом круге.

462. 7)—9) Сравните наибольшее значение одной части равенства с наименьшим значением другой.

463. Не забывайте об области значений y.

464. 1) Представьте все части неравенства как арксинусы и воспользуйтесь свойством монотонности арксинуса; 2) решите неравенство как квадратное относительно арккосинуса и, с учётом области значений арккосинуса, используйте свойство его монотонности.

465. Рассмотрите две точки, симметричные относительно прямой $y = x$. Сравните их абсциссы и ординаты.

РЕШЕНИЯ

Глава 1

Функции и графики

12. Высота коробки равна x, а в основании её квадрат со стороной $10 - 2x$. По формуле объёма прямоугольного параллелепипеда имеем $V = x(10 - 2x)^2 = x(2(5 - x))^2 = 4x(5 - x)^2$.

51. Возможность отсутствия корней можно проиллюстрировать примером. А для доказательства единственности заметим, что из условия $x_1 > x_0$, где $f(x_0) = g(x_0)$, следует, что $f(x_1) > f(x_0) = g(x_0) > g(x_1)$, а из условия $x_1 < x_0$ следует, что $f(x_1) < f(x_0) = g(x_0) < g(x_1)$. Значит, при $x_1 \neq x_0$ $f(x_1) \neq g(x_1)$, т. е. x_0 — единственный корень, что и требовалось доказать.

63. 3) Большему положительному значению подкоренного выражения соответствует меньшее значение функции y. Своё наибольшее значение подкоренное выражение принимает при $x = \dfrac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$. Это значение принадлежит промежутку $[-1; 3]$ и равно 4. Значит, наименьшее значение $y(2) = \dfrac{6}{\sqrt{4}} = 3$.

Чем дальше x от числа 2, тем меньше значение подкоренного выражения. На указанном промежутке самая удалённая от числа 2 точка — это левый конец промежутка. Значение подкоренного выражения при $x = -1$, наименьшее на указанном промежутке, равно $\dfrac{7}{4}$. Значит, наибольшее значение

$$y(-1) = \frac{6}{\sqrt{7/4}} = \frac{12}{\sqrt{7}}.$$

65. Функция $S(x)$ определена при всех x, при которых существует прямоугольник, т. е. при $0 < x < 3$. Обозначим длину другой стороны прямоугольника буквой a, тогда $S = ax$. Из подобия треугольников имеем: $\frac{a}{3-x} = \frac{4}{3}$, $a = \frac{4(3-x)}{3} = 4 - \frac{4}{3}x$, следовательно, $S(x) = 4x - \frac{4}{3}x^2$. Наибольшее значение квадратный трёхчлен $4x - \frac{4}{3}x^2$ принимает при $x = \frac{-4}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{3}{2}$, принадлежащем $D(S)$, значит, наибольшее значение функции $S(x)$ равно $S\left(\frac{3}{2}\right) = 3$. Получаем $0 < S(x) \leqslant 3$.

Ответ: $D(S) = (0; 3)$, $E(S) = (0; 3]$.

Глава 2

Степени и корни

70. 5) Не существует, так как степень $(-2)^n$ оканчивается на 4 только при чётном n ($n = 2, 6, 10, \ldots$), а такие степени положительны. 6) Не существует, $(-3)^n$ оканчивается на 1 только при n, кратном четырём, а такие степени положительны.

73. 1) б) При нечётном n функция является возрастающей. Если её график пересекает ось ординат в верхней полуплоскости, то в IV четверти у него не будет точек, а если в нижней, то точек не будет во II четверти.

98. 3) Возведём обе части уравнения в квадрат. $9x^2 + 16x = 4x^2 + 9 + 12x$, $5x^2 + 4x - 9 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{9}{5}$. Проверка: при $x = 1$: $2x + 3 = 2 + 3 \geqslant 0$, следовательно, 1 — корень; при $x = -\frac{9}{5}$: $2x + 3 = -\frac{18}{5} + 3 < 0$, следовательно, $-\frac{9}{5}$ не является корнем.

Ответ: 1.

101. 2) Если $x < 0$, должно быть $2x + 15 \geqslant 0$, т. е. $\begin{cases} x < 0, \\ 2x + 15 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant -7{,}5. \end{cases}$ Если $x \geqslant 0$, должно быть $2x + 15 \geqslant x^2$, т. е. $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2x + 15 \geqslant x^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 15 \leqslant 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ -3 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$ $0 \leqslant x \leqslant 5$. Объединяя результаты обоих случаев, получаем $-7{,}5 \leqslant x \leqslant 5$. 4) Должно быть $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 3x + 7 \geqslant 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geqslant 3x + 7, \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \geqslant -\frac{7}{3}, \\ x^2 - 5x - 6 \geqslant 0, \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \geqslant -\frac{7}{3}, \\ x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 6, \end{cases} \quad x \geqslant 6.$$

102. Высота столба воды должна оказаться не больше, чем 5 м, так как первоначальная высота равна 20 м, а останется не более чем четверть.

$$20 - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot \frac{t}{300} + 5\left(\frac{t}{300}\right)^2 \leqslant 5,\ 3 - 4 \cdot \frac{t}{300} + \left(\frac{t}{300}\right)^2 \leqslant 0.$$

Корень квадратного трёхчлена относительно $\frac{t}{300}$ равен 2, значит, $t = 600$ (с).

103. Подставляем в формулы числовые данные и решаем неравенство

$$\frac{(2 + 2 \cdot 1) \cdot 15^2}{2} + 1 \cdot (2 \cdot 15h + h^2) \leqslant 625,\ h^2 + 30h - 175 \leqslant 0.$$

Нужно найти положительный корень квадратного трёхчлена $h^2 + 30h - 175$, равный $h = -15 + \sqrt{225 + 175} = -15 + 20 = 5$. Значение h равно 5 см.

Ответ: 5 см.

112. $5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{16} \cdot T^4 \geqslant 46{,}17 \cdot 10^{17}$,

$$T^4 \geqslant \frac{46{,}17 \cdot 10^9 \cdot 16}{5{,}7} = 129{,}6 \cdot 10^9 = 1296 \cdot 10^8.$$

$$T = \sqrt[4]{1296 \cdot 10^8} = 10^2\sqrt{\sqrt{1296}} = 10^2\sqrt{36} = 600 \text{ (К)}.$$

Ответ: 600 К.

113. Здесь тот редкий случай, когда нужно знать (или догадаться), что сила Архимеда — это и есть выталкивающая сила.

$$1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 \leqslant 2\,116\,800,\ l^3 \leqslant 2\,116\,800 : 1000 : 9{,}8 = 216,$$

$$l \leqslant \sqrt[3]{216} = 6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 6 м.

114. 2) Введём вспомогательную переменную $y = \sqrt[6]{3x^4 + 16}$, где $y \geqslant \sqrt[6]{16}$, тогда $y^2 - y - 2 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = -1$ — не удовлетворяет условию введения переменной y. Вернёмся к переменной x: $\sqrt[6]{3x^4 + 16} = 2$, $3x^4 + 16 = 64$, $3x^4 = 48$, $x^4 = 16$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. 6) Введём вспомогательную переменную $y = \sqrt[3]{x} + 2$, тогда $\frac{4}{y} + \frac{y+1}{5} = 2$, $y^2 - 9y + 20 = 0$, $y_1 = 4$, $y_2 = 5$. Вернёмся к переменной x: $\sqrt[3]{x} + 2 = 4$, $x = 8$; $\sqrt[3]{x} + 2 = 5$, $x = 27$.

Ответ: 8; 27.

116. 2) Возведём равенство в куб:

$x + 10 - x + 9 - 3\sqrt[3]{(x+10)(x-9)}(\sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-9}) = 1$; $19 - 3\sqrt[3]{x^2 + x - 90} = 1$; $\sqrt[3]{x^2 + x - 90} = 6$; $x^2 + x - 90 = 216$; $x^2 + x - 306 = 0$; $x_1 = -18$; $x_2 = 17$.

Ответ: –18; 17.

117. 1) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9. \end{cases}$ Поскольку из второго уравнения $\sqrt{xy} = 3$, имеем: $\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt{x} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$ Составим вспомогательное квадратное уравнение, корнями которого являются $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$: $z^2 - 4z + 3 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 3$.

$\begin{cases} \sqrt{x_1} = 1, \\ \sqrt{y_1} = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x_2} = 3, \\ \sqrt{y_2} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 1$, $y_1 = 9$; $x_2 = 9$, $y_2 = 1$. 3) Возведём первое уравнение в куб, учитывая при этом информацию из второго уравнения: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4$, $x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 64$; $28 + 3\sqrt[3]{xy} \cdot 4 = 64$; $\sqrt[3]{xy} = 3$; $xy = 27$. Произведение неизвестных 27, а их сумма 28. Составим вспомогательное квадратное уравнение, корнями которого являются неизвестные: $z^2 - 28z + 27 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 27$. $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 27, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 27, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 1$, $y_1 = 27$; $x_2 = 27$, $y_2 = 1$. 4) Преобразуем первое уравнение системы, учитывая, что из второго уравнения $\sqrt[6]{xy} = 2$ и $\sqrt[6]{x^2y^2} = 4$:

$$\sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}\sqrt{x} = 12,\ \sqrt[6]{x^2y^3} + \sqrt[6]{x^3y^2} = 12,$$
$$\sqrt[6]{x^2y^2}\,(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}) = 12,\ 4(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}) = 12,\ \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} = 3.$$

Сумма корней равна 3, а их произведение равно 2. Составим вспомогательное квадратное уравнение: $z^2 - 3z + 2 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

$$\begin{cases}\sqrt[6]{x_1} = 1,\\ \sqrt[6]{y_1} = 2,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1 = 1,\\ y_1 = 64,\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt[6]{x_2} = 2,\\ \sqrt[6]{y_2} = 1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2 = 64,\\ y_2 = 1.\end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$, $y_1 = 64$; $x_2 = 64$, $y_2 = 1$.

118. 1) Введём вспомогательную переменную $y = \sqrt[6]{x + \sqrt{x}}$ ($y \geqslant 0$), тогда задача сводится к определению всех a, при которых уравнение $y^2 + 4y + a = 0$ имеет единственный неотрицательный корень. Это может произойти в трёх случаях: а) когда единственный корень уравнения является неотрицательным; б) когда корни уравнения имеют разные знаки; в) когда один корень равен 0, а другой отрицателен. Рассмотрим эти случаи. а) $D = 0$, $4 - a = 0$, $a = 4$. Корень $y_0 = -2$ отрицателен, что не удовлетворяет условию случая. б) $D > 0$ и произведение корней отрицательно: $\begin{cases}4 - a > 0,\\ a < 0,\end{cases}$ $\begin{cases}a < 4,\\ a < 0,\end{cases}$ $a < 0$. в) Один из корней равен 0, значит, $a = 0$. Тогда другой корень равен -4, что удовлетворяет условию случая. Объединяя результаты, получаем ответ: $a \leqslant 0$. 2) Введём вспомогательную переменную $x = \sqrt{2z + \sqrt[4]{z} + 1}$, где $x \geqslant 1$, так как $z \geqslant 0$. Тогда задача сводится к определению всех a, при которых уравнение $x^2 - 3x + a = 0$ имеет единственный корень, больший или равный единице. Это может произойти в трёх случаях: а) когда единственный корень уравнения больше или равен 1; б) один из корней больше, а другой — меньше 1 и когда один из корней 1, а второй меньше 1. Рассмотрим эти случаи. а) $D = 0$; $9 - 4a = 0$, $a = \frac{9}{4}$. Корень $x_0 = 1{,}5$ удовлетворяет условию случая. б) 1 находится между корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 3x + a$ тогда и только тогда, когда его значение при $x = 1$ отрицательно: $1 - 3 + a < 0$, $a < 2$. в) Один из корней трёхчлена равен 1 при $a = 2$. В этом случае второй корень равен 2, что не удовлетворяет условию случая. Объединяя результаты, получаем ответ: $a < 2$, $a = \frac{9}{4}$.

120. 2) $\sqrt[10]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3} - 2} = \sqrt[10]{(\sqrt{3} + 2)^2} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3} - 2} =$
$= \sqrt[5]{\sqrt{3} + 2} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3} - 2} = \sqrt[5]{3 - 4} = -1.$

125. 5) в) $(\sqrt[3]{4})^x = \sqrt[5]{16}$, $2^{\frac{2}{3}x} = 2^{\frac{4}{5}}$, $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}$, $x = \frac{6}{5}$,
$(\sqrt[3]{4})^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{16}$.

136. 1) Введём новую переменную $y = x + 3$, где $y \geqslant 0$, и перепишем уравнение в виде $(y + 6)^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{2}}$. Возведём уравнение в шестую степень: $y + 6 = y^3$, $y^3 - y - 6 = 0$. Попробуем подобрать целый корень. Видим, что уравнение имеет корень 2. Разложим левую часть уравнения на множители $(y - 2)(y^2 + 2y + 3) = 0$. Поскольку квадратный трёхчлен $y^2 + 2y + 3$ корней не имеет, то число 2 — единственный корень уравнения $y^3 - y - 6 = 0$. Это число удовлетворяет условию введения переменной y. Вернёмся к переменной x: $x + 3 = 2$, $x = -1$.

2) $2\sqrt{\frac{y+1}{y}} = \frac{-2y - 3}{y + 1}$. Возведём уравнение в квадрат

$4\left(\frac{y+1}{y}\right) = \frac{(2y + 3)^2}{(y + 1)^2}$, $4(y + 1)^3 = y(2y + 3)^2$,

$4y^3 + 12y^2 + 12y + 4 = 4y^3 + 12y^2 + 9y$, $12y + 4 = 9y$,

$3y = -4$, $y = -\frac{4}{3}$. Проверка. При $y = -\frac{4}{3}$ имеем $\frac{-2y - 3}{y + 1} =$
$= \frac{-2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 3}{-\frac{4}{3} + 1} = 1 \geqslant 0$. Ответ: $y = -\frac{4}{3}$.

137. 1) Пусть $y = x^{0,5}$, где $y \geqslant 0$. Тогда нам нужно найти все значения a, при которых квадратный трёхчлен $y^2 - 2ay - a + 2$ не имеет корней, бóльших или равных нулю. Найдём значения a, при которых трёхчлен не имеет корней, и объединим их с теми значениями a, при которых корни трёхчлена $y^2 - 2ay - a + 2$ отрицательны (включая возможность совпадения корней, т. е. единственности корня квадратного уравнения $y^2 - 2ay - a + 2 = 0$). (1) $D < 0$, $a^2 + a - 2 < 0$, $-2 < a < 1$. (2) Сумма отрицательных корней отрицательна, а их произведение — положительно. По теореме Виета, если корни существуют, то должно быть $2a < 0$ и $-a + 2 > 0$. Требовать существования корней ($D \geqslant 0$) излишне, так как их отсутствие приведёт всего лишь к дублированию найденных в (1) значений a: $\begin{cases} 2a < 0, \\ -a + 2 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0, \\ a < 2, \end{cases}$ $a < 0$. Объединяя найденные в (1) и (2) множества значений a, получаем ответ: $a < 1$.

Глава 3

Показательная и логарифмическая функции

150. $2^x + \frac{1}{2^x} - 2 = \frac{(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1}{2^x} \cdot \frac{(2^x - 1)^2}{2^x} \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

151. 7) $5^{x - \sqrt{3x-5}} = 5^3$, $x - \sqrt{3x-5} - 3 = 0$,

$3x - 3\sqrt{3x-5} - 9 = 0$, $(3x - 5) - 3\sqrt{3x-5} - 4 = 0$,

$\sqrt{3x-5} = -1$ или $\sqrt{3x-5} = 4$, $3x - 5 = 16$, $x = 7$.

Примечание. Это решение несколько экзотично — можно было решить, перенося корень в правую часть, возводя в квадрат и проверяя корни.

152. 3) $5^{x-1}(5^3 - 4 \cdot 5^2 + 4) = 29$, $5^{x-1} = 1$, $x = 1$; 6) $0{,}2^{x-1}(0{,}2^{-2} - 3 \cdot 0{,}2^{-1} - 6) = 500$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 125$, $5^{1-x} = 5^3$, $x = -2$; 8) $4^x + 4^{x-0{,}5} = 3^{x+0{,}5} + 3^{x-0{,}5}$, $4^{x-0{,}5}(2 + 1) = 3^{x-0{,}5}(3 + 1)$, $4^{x-1{,}5} = 3^{x-1{,}5}$, $x = 1{,}5$.

153. 4) Поскольку $2^x = 4 \cdot 2^{x-2}$, имеем $4 \cdot 2^{x-2} - 13 \cdot 2^{\frac{x-2}{2}} - 12 = 0$. Пусть $y = 2^{\frac{x-2}{2}}$, где $y > 0$, тогда $4y^2 - 13y - 12 = 0$.

С учётом условия $y > 0$ имеем: $y = 4$, $2^{\frac{x-2}{2}} = 2^2$, $x = 6$; 5) поскольку $5^x \neq 0$, умножая данное уравнение на 5^x, получаем $5 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$, $5^x = 1$ или $5^x = -\frac{3}{5}$. Второе равенство не выполняется ни при каких значениях x, а первое даёт $x = 0$; 6) $5 \cdot 5^x + \frac{5}{5^x} - 26 = 0$, $5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$, $5^x = 5$ или $5^x = 5^{-1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

154. 3) $\begin{cases} 17\left(3^{\frac{x}{2}} - 2^y\right) = 17, \\ 3^{\frac{x}{2}} + 2^y = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 1, \\ 3^{\frac{x}{2}} + 2^y = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 1, \\ 2 \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 18; \end{cases}$

$\begin{cases} 2^y = 8, \\ 3^{\frac{x}{2}} = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3, \\ x = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u + (\sqrt{5})^u = v + (\sqrt{5})^v, \\ u + v^2 = 12. \end{cases}$ В силу возрастания, функция $y = x + (\sqrt{5})^x$ принимает равные значения при одном и том же значении аргумента, т. е. $u = v$, следовательно, $\begin{cases} u = v, \\ u^2 + u - 12 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} u = v, \\ u = -4 \text{ или } u = 3; \end{cases}$ $u = v = -4$ или $u = v = 3$.

156. 10) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$. Выражение в левой части равенства задаёт убывающую функцию, которая принимает значение 1 при $x = 2$. Следовательно, её значения меньше 1 при $x > 2$.

157. 2) Должно быть:

$0{,}5^x - \frac{4}{0{,}5^x} - 3 > 0$; $0{,}5^{2x} - 3 \cdot 0{,}5^x - 4 > 0$; $0{,}5^x < -1$ или $0{,}5^x > 4$; $0{,}5^x > 0{,}5^{-2}$. В силу убывания показательной функции с основанием $0{,}5$ имеем $x < -2$.

169. 3) $4^x - 6^{x+1} + 5 \cdot 9^x = 0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 5 = 0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = 5$, $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{\frac{2}{3}} 5$.

174. 2) Выражения, стоящие в числителе и в знаменателе дроби, существуют при $x > 0$ и обращаются в нуль при $x = 4$ и $x = 9$. Отметим это на координатной прямой и проведём линию знаков (рис. 122). Ответ: $4 < x < 9$. 5) Выражения, стоящие в числителе и в знаменателе дроби, существуют при $x > 3$ и при $x < -3$. Знаменатель обращается в нуль при $x = \pm\sqrt{10}$, числитель — при $x = 10$ и $x = -1$. Отметим это на координатной прямой и проведём линию знаков (рис. 123).

Ответ: $-\sqrt{10} < x < -3$, $\sqrt{10} < x \leqslant 10$.

178. 6) $\log_6 3 = \log_6 (6:2) = 1 - a$.

179. 2) $\log_{30} 8 = \dfrac{3\lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \dfrac{3(\lg 10 - \lg 5)}{\lg 3 + 1} = \dfrac{3 - 3a}{b + 1}$.

181. 1) $3^{2+5+\ldots+3n-1} = 3^{40}$, $\dfrac{2 + 3n - 1}{2} \cdot n = 40$,

$3n^2 + n - 80 = 0$, $n = 5$; 2) $\dfrac{\lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \lg 5 \cdot \ldots \cdot \lg(n+1)}{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg n} = 10$,

$\lg(n+1) = 10\lg 2$, $n + 1 = 2^{10}$, $n = 1024 - 1 = 1023$.

183. 5) $\lg(5^x + x - 20) = \lg\dfrac{10^x}{2^x}$, $5^x + x - 20 = 5^x$, $x = 20$.

184. 6) $\log_2^2 x = 2 + \log_2 x$, $\log_2 x = -1$ или $\log_2 x = 2$, $x = 0{,}5$ или $x = 4$; 10) $5^{x+1} \cdot 5 = 3^{2x+1}$; $5^{x+2} = 3^{2x+1}$, $(x + 2)\log_3 5 =$

$= 2x + 1$, $x = \dfrac{1 - 2\log_3 5}{\log_3 5 - 2} = \dfrac{\log_3 \frac{3}{25}}{\log_3 \frac{5}{9}} = \log_{\frac{5}{9}} \dfrac{3}{25}$.

187. 2) ОДЗ неравенства $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{2}{3}$. Для этих значений x:

$\log_{\sqrt{3}-1}(-2x^2 + 5x + 12) < \log_{\sqrt{3}-1}(2 - 3x)$. Поскольку $\sqrt{3} - 1 < 1$, логарифмическая функция с основанием $\sqrt{3} - 1$ убывающая, следовательно, $-2x^2 + 5x + 12 > 2 - 3x$, $2x^2 - 8x - 10 < 0$, $-1 < x < 5$. С учётом ОДЗ получаем ответ:

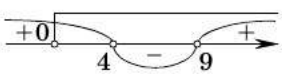


Рис. 122

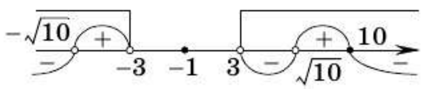


Рис. 123

$-1 < x < \frac{2}{3}$. 4) $-\log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1)(2 + \log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1)) + 3 > 0$. Неравенство $-2\log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1) - \log^2_{\frac{1}{3}}(3^x - 1) + 3 > 0$ решаем как квадратное относительно $\log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1)$: $-3 < \log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1) < 1$. Учитывая убывание логарифмической функции с основанием $\frac{1}{3}$, получаем $\frac{1}{3} < 3^x - 1 < 27$, $\frac{4}{3} < 3^x < 28$. Учитывая возрастание показательной функции с основанием 3, получаем ответ: $\log_3 \frac{4}{3} < x < \log_3 28$.

Глава 4

Тригонометрические функции и их свойства

208. 1) Вокруг своей оси Земля поворачивается примерно за 24 ч. $2\pi : 24 \approx 3{,}14 : 12 \approx 0{,}26$ (рад/ч).

245. 2) в) Общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$, а α — угол между заданной прямой и осью абсцисс. $\alpha = 120^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$. Если прямая проходит через точку, заданную координатами, то в уравнение прямой подставляем её координаты и находим значение b: $3 = -\sqrt{3} \cdot 0 + b$, $b = 3$. Уравнение прямой $y = -\sqrt{3}x + 3$.

262. 1) $4\sin^2 x + 5\sin x + 1 = 0$. Решим это уравнение как квадратное относительно $\sin x$:

$$\sin x = -1 \text{ или } \sin x = -\frac{1}{4},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = -\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n,$$

$x = \pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$, n — любое целое число.

274. 2) $\arccos\left(\cos\frac{24\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\left(4\pi - \frac{4\pi}{7}\right)\right) =$

$= \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right) = \frac{4\pi}{7}$;

3) $\arccos(\sin 6) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6\right)\right) =$

$= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6 + 2\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 6 + 2\pi.$

287. Решением будут те и только те значения a, при которых функция $t = z^2 + 6z + a$ принимает только положительные значения на промежутке $[-1; 1]$ ($z = \sin 2x$). Абсцисса вершины параболы $t = z^2 + 6z + a$ равна -3. Для выполнения требования задачи достаточно, чтобы значение функции t в точке $z = -1$ было положительным: $(-1)^2 + 6(-1) + a > 0$, $a > 5$.

304. 1) $\sin 2x \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 2x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$,

$\frac{\pi}{12} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$. По формулам приведения $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 3x$, $\cos 3x \leqslant -\frac{1}{2}$,

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 3x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

321. 1) Соседние нули функции отстоят друг от друга на $\frac{\pi}{2}$, значит, период функции не может быть меньше $\frac{\pi}{2}$. Проверим, является ли данное число периодом, т. е. выполняется ли равенство $\operatorname{tg} 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Равенства верны, следовательно, $\frac{\pi}{2}$ — период функции $y = \operatorname{tg} 2x$.

333. 2) Рассмотрим разность $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) - 2 =$
$= \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg} x} \geqslant 0$, поскольку тангенс острого угла положителен, значит, для любого острого угла x полученное неравенство верно, т. е. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$. Что и требовалось доказать.

348. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) =$
$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) =$
$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta =$
$= (\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta) - (\cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta) =$
$= \sin^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - \sin^2\beta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$

366. 1) а) Найдём тангенс разности углов, образованных этими прямыми с осью абсцисс: $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Подставим значения тангенсов в формулу $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, получим: $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$, значит, $\alpha - \beta = 45°$.

407. 1) Представим $\sin\alpha = \cos\beta$ следующим образом: $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$. Тогда $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или

$\alpha = -\beta - \frac{\pi}{2} + \pi(2n + 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. $x_1 = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n$ или $x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$,

$n \in \boldsymbol{Z}$. 2) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Тогда $\alpha = -\beta + \frac{\pi}{2} + \pi n$.

От равенства значений функций $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$ перейдём к условию равенства аргументов $2x = \frac{\pi}{2} - 5x + \pi n$,

$2x + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $7x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

408. Из данного равенства следует, что точка с координатами $(x; y)$ лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Но по определению абсцисса точки этой окружности является синусом, а ордината — косинусом некоторого угла поворота φ, т. е. $\sin\varphi = x$ и $\cos\varphi = y$, что и требовалось доказать.

410. 11) $(\cos 3x + \cos 7x) + (1 + \cos 10x) = 0$;

$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos^2 5x = 0$; $2\cos 5x\left(2\cos\frac{7}{2}x\cos\frac{3}{2}x\right) = 0$.

$\cos 5x = 0$ или $\cos\frac{7}{2}x = 0$, или $\cos\frac{3}{2}x = 0$.

411. $4\sin 3x \sin x - 2\cos 2x + 1 = 0$.

Поскольку $2\sin 3x \cdot \sin x = \cos 2x - \cos 4x$, имеем
$2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 2x + 1 = 0$; $2\cos 4x - 1 = 0$;
$\cos 4x = \frac{1}{2}$, $4x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Искомый корень уравнения $x = \frac{\pi}{12}$.

412. 2) $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x}{2\cos x + 7\sin^2 x} = -\dfrac{1}{2}$;

$$\frac{4\cos^2 x + 2\cos x + 2\cos x + 7\sin^2 x}{2(2\cos x + 7\sin^2 x)} = 0,$$

$4\cos^2 x + 4\cos x + 7 - 7\cos^2 x = 0$, $3\cos^2 x - 4\cos x - 7 = 0$, $\cos x = -1$. На отрезке $[-\pi; \pi]$ $\cos x = -1$ при $x = \pm\pi$. Эти значения не обращают знаменатель в нуль.

413. 2) $\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = \sqrt{3} + 2\sin x\cos x$;
$\sqrt{3} + 2\sin x\cos x - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$;
$\sqrt{3}(1 - \sin x) - 2\cos x(1 - \sin x) = 0$; $(1 - \sin x)(\sqrt{3} - 2\cos x) = 0$;
$\sin x = 1$ или $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
Из множества решений выбираем те, которые удовлетворяют условию $0 < x < 2$: $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$.

Глава 5

Элементы теории вероятностей и комбинаторики

414. Есть 36 равновероятных возможностей вытащить одну карту. В 9 из них карта окажется червой, в 16 — картинкой, в 8 — валетом или королём.

415. Всего имеется 6 равновероятных исходов при бросании кости. В четырёх из них число выпавших очков больше 2, в трёх — число очков простое, в двух — кратно 3.

417. Таня ошиблась в самом начале своих рассуждений. Она должна была найти общее число всех равновероятных возможностей, которые имеются при бросании двух монет. Таких возможностей четыре: ОО, ОР, РО, РР. Решка выпадает в трёх из них, значит, вероятность выпадения решки равна $\dfrac{3}{4}$.

418. Есть всего четыре равновероятных возможности вытащить карточку и положить её на стол. В трёх из них верхняя сторона карточки окажется белой. Только в одном из этих трёх равновероятных случаев нижняя сторона карточки чёрная. Значит, искомая вероятность равна $\dfrac{1}{3}$.

429. Из выбранной 1000 зёрен всхожими оказались $1000 - 27 = 973$ зерна, значит, частота всхожести равна примерно 97%. Это значение и принимаем за приближённую вероятность того, что наугад взятое зерно окажется всхожим.

430. Частота выемки чёрного шара примерно равна 30%. Считая вероятность вытащить чёрный шар равной примерно 30%, можно с большой степенью уверенности (но не наверняка, конечно) сказать, что в коробке 3 чёрных шара.

431. Задача аналогична примеру 1 из текста пункта 28. Есть четыре возможности выбрать дорогу из пункта A в пункт B. Каждому варианту этого выбора соответствует три возможности выбрать дорогу из B в C. По правилу произведения $4 \cdot 3 = 12$.

432. События, вероятность которых требуется найти в этой задаче, определяются не порядком вытаскивания карт из колоды, а только тем, какие две карты вытащены. Таким образом, комбинации вытащенных карт являются сочетаниями. Все возможные сочетания при вытаскивании карт равновероятны. Их число равно C_{52}^2.

1) а) В колоде по 13 карт каждой из четырёх мастей. Одну из карт выбираем из 13 бубен, а другую из 39 карт других мастей. По правилу произведения число благоприятных исходов равно $13 \cdot 39$, и вероятность события равна

$$\frac{13 \cdot 39}{C_{52}^2} = \frac{13}{34} \approx 0{,}38.$$

б) В колоде есть 4 туза и 48 других карт, значит, число возможных благоприятных сочетаний равно $4 \cdot 48$. Вероятность вытащить только одного туза равна $\frac{4 \cdot 48}{C_{52}^2} = \frac{32}{221} \approx 0{,}14.$

в) Картинки — это валеты, дамы, короли и тузы. Всего в колоде 16 картинок, значит, одну из них можно выбрать 16 способами, а для выбора другой карты остаётся 36 возможностей. Число благоприятных исходов $16 \cdot 36$, а соответствующая вероятность равна $\frac{16 \cdot 36}{C_{52}^2} = \frac{96}{221} \approx 0{,}43.$

2) а) Обе карты выбираются из 13 бубен, значит, число благоприятных исходов равно C_{13}^2. Искомая вероятность равна

$$\frac{C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{1}{17} \approx 0{,}06.$$

3) а) Число возможностей складывается из числа вариантов, когда среди карт есть только одна бубна, и из числа вариантов, в которых вытаскиваются две бубны. Эти числа были найдены в заданиях 1) и 2): $13 \cdot 39 + C_{13}^2$. Число благоприятных исходов можно найти иначе: вычитая из общего числа исходов C_{52}^2 число «неблагоприятных» исходов C_{39}^2, когда обе карты выбираются из 39 карт других мастей: $C_{52}^2 - C_{39}^2$. Искомая вероятность равна

$$\frac{13 \cdot 39 + C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{C_{52}^2 - C_{39}^2}{C_{52}^2} = \frac{15}{34} \approx 0{,}44.$$

436. Достаточно выбрать одну пару, поскольку тем самым определится и вторая пара теннисисток.

440. Саша с Колей могут оказаться на любых двух местах из 20. Поскольку важно, на каком месте сидит Коля, а на каком Саша, то общее число вариантов равно A_{20}^2. На каком бы из 20 мест ни оказался Коля, рядом с ним будет только одно место для Саши. Значит, есть всего 20 вариантов для мальчиков оказаться соседями. Вероятность этого равна $\frac{20}{20 \cdot 19} = \frac{1}{19}$.

441. Задача аналогична примеру 4 пункта 28. Всего P_{11} способов построиться. Представим себе, что Николай будет становиться в шеренгу последним. Без Николая мальчики могут построиться P_{10} способами. В каждом из них Николай может встать либо справа, либо слева от Александра. Значит, есть всего $2 \cdot P_{10}$ вариантов построения, при которых Николай и Александр стоят рядом. Вероятность этого равна

$$\frac{2P_{10}}{P_{11}} = \frac{2}{11}.$$

442. Любые три из данных пяти точек являются вершинами. Значит, нужно найти число вариантов выбора 3 элементов из данных 5. Поскольку порядок выбора не важен (например, $\triangle ABC$ и $\triangle BAC$ — это один и тот же треугольник), искомое число находим, как число сочетаний из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Ответ: 10 треугольников.

443. Выбрав любые 4 вершины, получим четырёхугольник с одной точкой пересечения диагоналей, значит, число таких точек равно C_{17}^{4}.

444. В футбольной команде 11 игроков, включая вратаря. Выбор игроков в первую команду полностью определяет, какие ученики будут играть во второй команде. При этом каждый выбор некоторых 11 игроков даёт точно такое разбиение на команды, что и выбор остальных одиннадцати, поэтому число сочетаний нужно поделить на 2.

446. 1) Всего может быть A_{36}^{2} равновероятных исходов. Поскольку в одной масти 9 карт, есть A_{9}^{2} способа вытащить две карты этой масти, но масть может быть любая из 4, значит, всего есть $4A_{9}^{2}$ благоприятных исходов. Искомая вероятность равна

$$\frac{4A_9^2}{A_{36}^2} = \frac{4 \cdot 9!}{7!} \cdot \frac{34!}{36!} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 9}{35 \cdot 36} = \frac{8}{35}.$$

2) Первую карту можно вытащить 36 способами. После этого в колоде останется ещё три карты того же достоинства в других мастях. Значит, число благоприятных исходов равно $36 \cdot 3$, а вероятность вытащить карты одного достоинства равна

$$\frac{36 \cdot 3}{A_{36}^2} = \frac{36 \cdot 3 \cdot 34!}{36!} = \frac{3}{35} \approx 0{,}09.$$

3) Достоинства карт равны, как мы видели в задании 2), в $36 \cdot 3$ случаях. В остальных $A_{36}^{2} - 36 \cdot 3$ случаях одна из карт старше другой. В половине этих случаев вторая карта старше. Искомая вероятность равна

$$\frac{A_{36}^2 - 36 \cdot 3}{2A_{36}^2} = \frac{16}{35}.$$

447. Комбинации, число которых нужно найти, чтобы ответить на вопросы задачи, связаны только с составом вытащенной из колоды шестёрки карт. Значит, комбинации карт являются сочетаниями. 1) а) Туза можно выбрать 4 способами, а остальные 5 карт придётся выбирать из 32 карт, которые не являются тузами. б) Чтобы найти число возможностей вытащить хотя бы одного туза, можно из общего числа всех вариантов вычесть число тех из них, в которых среди шести карт нет ни одного туза. в) Если из колоды вынуть всех четырёх тузов, то остаётся добрать 2 карты из оставшихся 32.

448. Чтобы разыграть билеты между учениками, можно взять 25 одинаковых конвертов и положить в 15 из них билеты. 1) У Коли есть 25 вариантов выбрать конверт и в 15 из них конверт окажется с билетом. Значит, вероятность получить билет у Коли $\frac{3}{5}$. 2) У Коли и Саши есть всего C_{25}^2 возможности выбрать конверты. Из них в C_{15}^2 случаях в обоих конвертах окажутся билеты. Значит, вероятность получить билеты у Коли и Саши равна $\frac{C_{15}^2}{C_{25}^2} = \frac{15 \cdot 14}{25 \cdot 24} = \frac{7}{20}$. 3) Число вариантов, в которых ни в Колином, ни в Сашином конвертах не окажется билетов, равно C_{10}^2. Значит, вероятность, что им не достанется билетов, равна $\frac{C_{10}^2}{C_{25}^2} = \frac{10 \cdot 9}{25 \cdot 24} = \frac{3}{20}$.

451. Подставим в формулу бинома Ньютона x вместо a, 2 вместо b и 10 вместо n. Нас интересует член многочлена стандартного вида, содержащий x^7. Поскольку $x^7 = x^{10-3}$, имеем:

$$C_{10}^{10-3}x^{10-3} \cdot 2^3 = C_{10}^7 x^7 \cdot 8 = \frac{10! \cdot 8}{7!(10-7)!}x^7 =$$

$$= \frac{10! \cdot 8}{7!3!}x^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8}{3 \cdot 2}x^7 = 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8x^7 = 960x^7.$$

Ответ: 960.

Глава 6

Повторение

456. 4) Должно выполняться условие $x - 5 > 0$, т. е. $x > 5$. Заметим, что для этих значений x основание логарифма $\frac{x+4}{x+1}$ больше 1.

$\log_{\frac{x+4}{x+1}}(x-5) < 1$, $\log_{\frac{x+4}{x+1}}(x-5) < \log_{\frac{x+4}{x+1}}\frac{x+4}{x+1}$. В силу возрастания логарифмической функции с основанием больше 1 имеем:

$$0 < x - 5 < \frac{x+4}{x+1}, \begin{cases} x > 5, \\ (x-5)(x+1) < x + 4, \end{cases} \begin{cases} x > 5, \\ x^2 - 5x - 9 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5, \\ \dfrac{5-\sqrt{61}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}, \end{cases} \quad 5 < x < \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}.$$

463. 1) г) $\sin 10 = \sin(3\pi + (10 - 3\pi)) = -\sin(10 - 3\pi) = \sin(3\pi - 10)$. Поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant 3\pi - 10 \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем: $\arcsin(\sin 10) = \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10$.

464. 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \arcsin(x^2 - 1{,}5x) \leqslant \arcsin\frac{1}{2}$. Поскольку арксинус является возрастающей функцией, имеем: $-\frac{1}{2} < x^2 - 1{,}5x \leqslant \frac{1}{2}$; $-1 < 2x^2 - 3x \leqslant 1$; $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x < 0{,}5 \text{ или } x > 1, \\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}; \end{cases}$$

$$\frac{3-\sqrt{17}}{4} \leqslant x < 0{,}5 \text{ или } 1 < x \leqslant \frac{3+\sqrt{17}}{4}.$$

2) $-\frac{3}{2} < \arccos x < \frac{1}{3}$. С учётом области значений арккосинуса имеем:

$$0 \leqslant \arccos x < \frac{1}{3}, \ \arccos 1 \leqslant \arccos x < \arccos\cos\frac{1}{3}.$$

Поскольку функция арккосинус убывает, окончательно получаем: $\cos\frac{1}{3} < x \leqslant 1$.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСОВ

Босс В. Интуиция и математика. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.

Виленкин Н. Я., Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра: пособие для учащихся 10—11 кл. — М.: Просвещение, 2008.

Гашков С. Б. Занимательная компьютерная арифметика: Математика и искусство счёта на компьютерах и без них. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

Громов А. И., Савчин В. И. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие. — М.: РУДН, 2008.

Клайн М. Математика. Утрата определённости. — М.: Мир, 1984.

Клайн М. Математика. Поиск истины. — М.: Мир, 1988.

Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. — М.: ЛКИ, 2008.

Крамор В. С. Задачи на составление уравнений и методы их решения. — М.: Оникс, Мир и Образование, 2009.

Лурье М. В. Тригонометрия. Техника решения задач. — М.: УНЦ ДО, 2006.

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебраический тренажёр: пособие для школьников и абитуриентов. — М.: Илекса, 2007.

Моденов В. П. Математика для школьников и абитуриентов. — М.: ИКИ; Наука, Физматлит, 2002.

Понтрягин Л. С. Жизнеописание Льва Семёновича Понтрягина, математика, составленное им самим. — М.: КомКнига, 2012.

Рывкин А. А., Ваховский Е. Б. Сборник задач по математике с решениями для поступающих в вузы. — М.: Оникс, 21 век, 2003.

Садовничий Ю. В., Фролкина О. Д. Геометрия. Конкурсные задачи с решениями: В 5 ч.: учебное пособие. — М.: УНЦ ДО, 2009. (В помощь поступающим в вузы.)

Суходольский Г. В. Математика для гуманитариев. — М.: Гуманитарный центр, 2007.

Хорошилова Е. В. Элементарная математика: В 2 ч. — М.: МГУ, 2010.

Шарыгин И. Ф. Математика. Для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 2004.

Шабунин М. И. Пособие по математике для поступающих в вузы. — М.: Физматлит, 2003.

Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики. Математический анализ. Теория вероятностей: пособие для учащихся 10—11 кл. — М.: Просвещение, 2008.

Шибасов Л. П. От единицы до бесконечности. — М.: Дрофа, 2006.

Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. — М.: Знание, 1985.

Якушев Г. М. Большая математическая энциклопедия. — М.: Олма-Пресс, 2005.

Интернет-ресурсы

http://gotourl.ru/6030 — Официальный информационный портал единого государственного экзамена.

http://gotourl.ru/6031 — Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

http://gotourl.ru/6032 — Международный математический турнир городов.

http://gotourl.ru/6033 — Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» для школьников и студентов.

http://gotourl.ru/6034 — Образовательный журнал «Потенциал» для старшеклассников по разделам «Физика», «Математика», «Информатика».

http://gotourl.ru/6035 — Интернет-библиотека Московского центра непрерывного математического образования.
http://gotourl.ru/6036 — Математические этюды: познавательные экскурсии по красивым математическим задачам.
http://gotourl.ru/6037 — Математическая программа для самообучения школьников.
http://gotourl.ru/6038 — Всероссийская олимпиада школьников по математике
http://gotourl.ru/6039 — Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру»

ТЕМЫ ПРОЕКТОВ

1. История развития понятия числа.
2. Роль функций в решении финансовых задач.
3. Различные типы тригонометрических уравнений и методы их решения.
4. Приложения показательной функции в биологии, физике, экономике и других науках.
5. Перестановки, сочетания и размещения с повторениями. Основные формулы. Решение комбинаторных задач.
6. Геометрическая вероятность. Решение задач на нахождение геометрических вероятностей.
7. Бином Ньютона. Различные способы доказательства бинома Ньютона: комбинаторное, индуктивное. Треугольник Паскаля. Решение задач с использованием бинома Ньютона.
8. Азартные игры и вероятность выигрыша.
9. Математическое открытие, которое привело к значительным изменениям в науке, технике или общественной жизни.
10. Возможности зарабатывания денег.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Корни квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$	$x_{1;\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + 2kx + c = 0$ $(a \neq 0)$	$x_{1;\,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ $\boldsymbol{a + b + c = 0}$	$x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{c}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ $\boldsymbol{a - b + c = 0}$	$x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{c}{a}$
Формулы Виета	
$x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Координаты вершины параболы — графика квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Разложение на множители многочлена n-й степени, имеющего корень x_1 (следствие из теоремы Безу)

$$P_n(x) = (x - x_1)\,P_{n-1}(x)$$

Свойства корней

квадратных	степени n
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
	$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

Степени и логарифмы

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ $(b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$ $a^{\log_a b} = b$ $\log_c (ab) = \log_c \lvert a \rvert + \log_c \lvert b \rvert$ $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c \lvert a \rvert - \log_c \lvert b \rvert$ $\log_a b^c = c \log_a \lvert b \rvert$ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_{\lvert a \rvert} b$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Тригонометрия

Некоторые значения тригонометрических функций

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Окончание табл.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Формулы приведения

α	$\varphi + 2\pi n$	$-\varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$
$\sin\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\cos\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$-\mathrm{tg}\,\varphi$	$-\mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$-\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$-\mathrm{ctg}\,\varphi$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$-\mathrm{ctg}\,\varphi$	$-\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$-\mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$-\mathrm{tg}\,\varphi$

Основные тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha} \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

Переход от суммы к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Переход от произведения к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Вспомогательный угол

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi),$$

$$\text{где } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Решение уравнений

$\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ